# Eletromagnetismo

*Guilherme Henrique Alves*

# Sobre o autor

**Guilherme Henrique Alves**

Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade de Uberaba (Uniube). Professor do curso de Engenharia Elétrica da Universidade de Uberaba (Uniube). Tem experiência nas áreas de conversão de energia, máquinas elétricas e eletromagnetismo aplicado.

# Sumário

# Apresentação

Caro(a) aluno(a), é um prazer tê-lo(a) conosco.

Apresentamos a você o livro relativo à disciplina **Eletromagnetismo**. Nela, estudam-se os fenômenos eletromagnéticos e suas aplicações na engenharia. Trata-se de disciplina indiscutivelmente importante no currículo de Engenharia Elétrica, pois contém os conceitos que são a base para praticamente todas as áreas da engenharia elétrica. Daí a necessidade do seu empenho e dedicação no estudo deste conteúdo.

O presente livro se compõe de quatro capítulos, cada um deles se ocupando de um aspecto fundamental da disciplina Eletromagnetismo. A seguir, apresentamos uma síntese do que você encontrará em cada um deles.

No capítulo 1, intitulado “Análise Vetorial”, são apresentados alguns dos fundamentos matemáticos básicos e necessários para, então, considerar os aspectos físicos, que serão estudados posteriormente. Como você mesmo perceberá, a análise vetorial é importante ferramenta matemática para o aprofundamento dos estudos futuros de eletromagnetismo. A familiarização com os conceitos vetoriais será fundamental principalmente para o aprendizado dos campos elétricos e magnéticos.

Em seguida, no capítulo 2, “Campo elétrico, densidade de fluxo e a Lei de Gauss”, o estudo se voltará, como indicado no título, para o campo elétrico e a sua densidade de fluxo – conhecimento que será importante para o estudo posterior dos circuitos elétricos – e que prepara para a utilização de uma poderosa ferramenta, a Lei de Gauss.

“Campo Magnético Estacionário, a Lei de Faraday” é o título do capítulo 3. Nele, será introduzido um novo conceito, o de campo magnético, que é um pouco diferente de campo elétrico, mas com ele relacionado. O interesse aqui é conhecer alguns dos princípios fundamentais da teoria básica dos campos magnéticos.

Por fim, temos o quarto e último capítulo, que tem por título “Força Magnética e a Natureza dos Materiais Magnéticos”. Agora, você está preparado(a) para estudar sobre a força e torques relacionados a campos magnéticos e também sobre a permeabilidade magnética dos meios materiais. O capítulo inicia-se considerando as forças e torques em condutores percorridos por correntes elétricas em uma espiral, o campo magnético terrestre e algumas aplicações práticas destes para o funcionamento de equipamentos, como os motores e o sensor de efeito Hall. Em seguida, são apresentados os tipos de permeabilidade magnética em diferentes materiais.

Como você pode ver, esta disciplina envolve muitos conceitos indispensáveis à formação de um bom engenheiro eletricista. Todos esses conceitos aqui aprendidos servirão como base para que você possa iniciar os estudos relacionados às disciplinas posteriores, como Conversão de Energia e Máquinas Elétricas. Fazemos votos de que você aproveite o conteúdo deste livro de forma conveniente, já que ele é importante para a sua formação profissional.

Bons estudos!

# Capítulo 1

# Análise vetorial

## Introdução

A análise vetorial é um assunto matemático importante para darmos o primeiro passo em direção à resolução de desafios que envolvem o eletromagnetismo. A maioria dos estudantes de engenharia não dedica parte do seu tempo à análise vetorial durante a trajetória de estudos, embora estudos de cálculos tenham sido introduzidos no início do curso. Alguns conceitos básicos serão abordados neste capítulo, e o tempo a eles dedicados agora vai depender do nível de orientação do estudante.

A análise vetorial possui alguns símbolos novos, algumas regras novas e exige uma maior concentração, atenção e prática.

A leitura deste capítulo resultará em ótimos resultados durante os estudos seguintes.

## Objetivos

Ao final do estudo deste capítulo, você será capaz de:

- compreender os conceitos sobre escalares e vetores;
- executar alguns cálculos sobre álgebra vetorial;
- compreender o sistema de coordenadas cartesianas;

- aprender sobre o vetor unitário e a sua utilidade;
- compreender outros conceitos básicos para ferramentas de cálculos vetoriais;
- interpretar os resultados obtidos, com o objetivo de verificar a consistência destes.

## Esquema



## 1.1 Análise vetorial

A análise vetorial é um assunto matemático, melhor ensinado por pessoas formadas em matemática, engenharia ou física. Conforme Hayt e Buck (2003), a maioria dos estudantes iniciantes e avançados em engenharia não têm disponibilidade para um curso de análise vetorial, apesar que muitos dos conceitos e operações vetoriais são introduzidos em cursos de cálculos.

A maioria dos estudantes de engenharia/física têm uma inclinação para fazer um curso completo de análise vetorial, no qual muitos dos conceitos elementares são introduzidos na base de disciplinas como o cálculo. Estes conceitos fundamentais são abordados neste capítulo, e o tempo dedicado pelo estudante vai depender da dedicação de cada um. Utilizando conhecimentos de vetores, observaremos que a análise vetorial possui símbolos novos e regras diferentes das disciplinas anteriores.

O estudo da eletricidade e do magnetismo é possível sem o uso de análise vetorial, muitos estudantes de engenharia assim o fizeram, em cursos de Engenharia ou de Física básica. Porém, a continuidade nos estudos destes pontos leva a equações muito extensas, levando ao velho “descaso do estudante”.

A leitura deste assunto é extremamente útil para a continuidade da matéria disciplinar de eletromagnetismo.

## 1.2 Escalares e vetores

O termo escalar se refere a uma grandeza que pode ser representada por um valor real: temperatura, volume, massa, trabalho, tempo, densidade, resistividade e pressão (mas não à força).

Já uma grandeza vetorial tem magnitude e direção no seu espaço. No nosso estudo, estes serão representados em espaços bi e tridimensionais, mas podem ser representados em n-dimensões em outras aplicações avançadas. Exemplos de vetores são: força, velocidade, aceleração, deslocamento, empuxo, campo elétrico, campo magnético, etc.

O vetor pode ser representado ligado a uma origem arbitrária a um ponto genérico no espaço. Normalmente é fácil fazer uma analogia do fenômeno físico de um campo magnético terrestre exercendo uma força em uma agulha de alguma bússola. Ou as partículas de fumaça sendo movimentadas com uma determinada força e direção por um campo definido pela velocidade do ar. Algumas grandezas são definidas em cada ponto da região. O valor de um campo varia geralmente com a posição e com o tempo.

## 1.3 Álgebra vetorial

Agora que definimos vetores e campos vetoriais (Figura 2), podemos iniciar os estudos sobre a definição da regra aritmética vetorial, da álgebra vetorial e do cálculo vetorial. Algumas regras serão semelhantes às da álgebra escalar, algumas serão ligeiramente diferentes e outras serão inteiramente novas.

As regras são aquelas de um ramo da matemática, já comumente estabelecidas. Estas são apenas coerentes e extremamente úteis. Mas existem outras álgebras menos familiares com regras bem diferentes. Por exemplo, a álgebra Booleana, na qual o produto de *AB* pode ser somente 1 ou 0. Estas regras possuem um conjunto próprio de regras. Devemos ficar atentos para não cair no erro de confundir com as regras mais tradicionais da álgebra.

A adição vetorial segue a regra do paralelogramo. Esta regra pode ser facilmente, mentalmente e graficamente. A Figura 1 mostra a soma de dois vetores A e B. Pode-se verificar facilmente que A + B = B + A, que a adição vetorial obedece à propriedade comutativa. A adição vetorial também obedece à propriedade associativa:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \qquad (1)$$

Note que, quando um vetor é desenhado com uma seta de tamanho finito, sua posição é definida pela extremidade final da seta.

Vetores coplanares, ou vetores pertencentes ao mesmo plano comum (Figura 1), podem ser somadas, expressando-se cada vetor em termos de suas componentes "horizontal" e "vertical", e somando os seus componentes correspondentes.
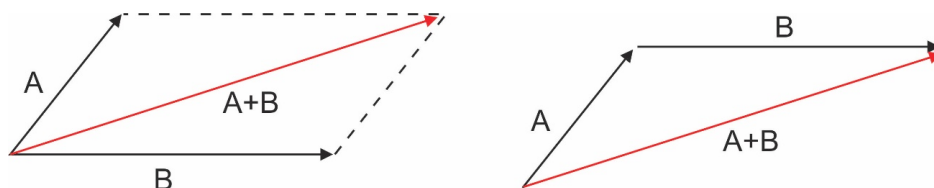
**Figura 1:** Dois vetores podem ser somados tanto desenhando-se ambos os vetores a partir de uma origem comum e completando o paralelogramo, ou começando o segundo vetor a partir da extremidade do primeiro e completando o triângulo.
**Fonte**: Elaborado pelo autor.

Os vetores em três dimensões também podem ser somados, expressando-se os vetores em termos de três componentes.

A regra para a subtração de vetores decorre facilmente da regra para adição, em que podemos sempre expressar A – B como A + (–B); o sinal, ou sentido, do segundo vetor é invertido, e este é somado ao primeiro como na regra da adição.

Vetores podem ser multiplicados por escalares. O módulo do vetor resultante se modifica, mas o seu sentido não; quando o escalar é positivo, ele inverte o seu sentido quando for multiplicado por um escalar negativo. A multiplicação de um vetor por um escalar também obedece às propriedades associativas e distributiva da álgebra:

$$(r + s)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + s(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$
$$= r\mathbf{A} + r\mathbf{B} + s\mathbf{A} + s\mathbf{B} \qquad (2)$$

A divisão de um vetor por um escalar é meramente a multiplicação do vetor pelo inverso do escalar.

A multiplicação entre dois vetores será discutida no item 1.4.2.

Dois vetores são iguais quando a diferença entre eles é igual a zero:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad \text{se} \qquad \mathbf{A} - \mathbf{B} = 0 \qquad (3)$$

Quando utilizamos campos vetoriais, podemos sempre somar e subtrair vetores (Figura 2).
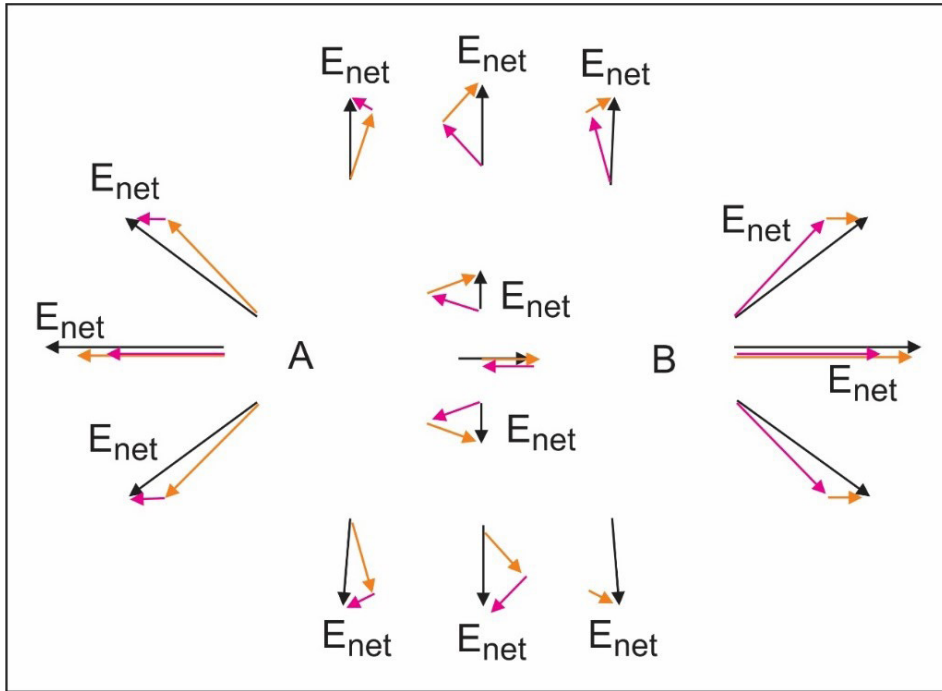
**Figura 2:** Exemplo de campo vetorial.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 1.4 Sistema de coordenadas cartesianas

Para descrever um vetor rigorosamente, deve-se conhecer os valores de dados como: comprimento, direção, projeção ou componentes específicos. O método mais simples dentre todos que existem é o sistema de coordenadas cartesianas ou retangulares.
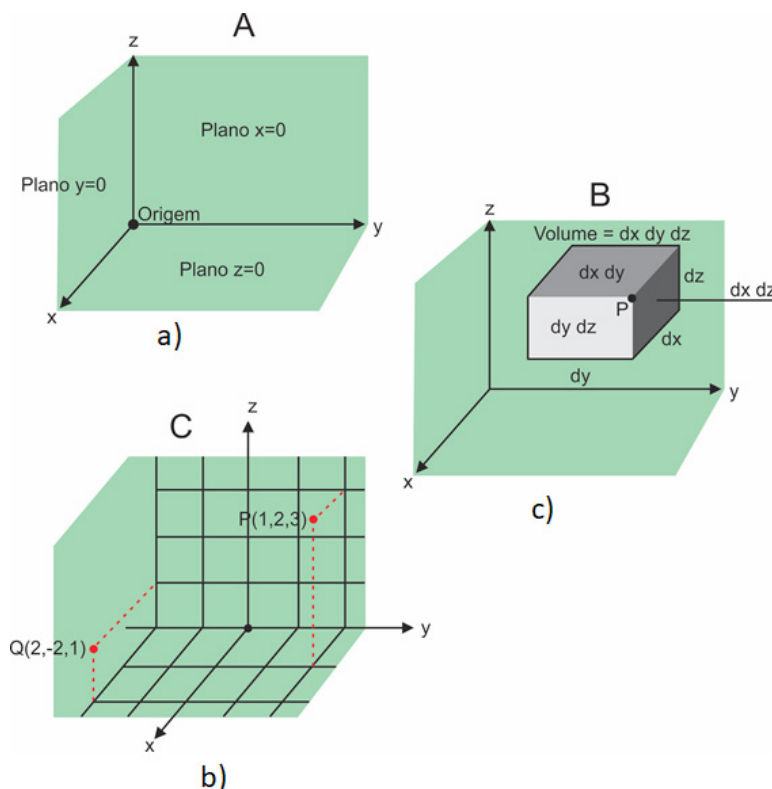
**Figura 3:** (a) Um sistema de coordenadas cartesianas do tipo triedro direto. Se os dedos dobrados da mão direita indicarem o sentido de rotação do eixo x para o eixo y, então o polegar indica a direção do eixo z. (b) A localização dos pontos P(1, 2, 3) e Q(2, -2, 1). (c) O elemento diferencial de volume em coordenadas cartesianas; dx, dy, dz são, em geral, diferenciais independentes.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

No sistema de coordenadas cartesianas, estabelecemos três eixos em ângulos retos entre si, denominados eixos *x*, *y* e *z*. O sistema da Figura 3(a) mostra um sistema de coordenadas cartesianas. A Figura 3(b) mostra os pontos *P* e *Q* cujas coordenadas são (1, 2, 3) e (2, -2, 1), respectivamente. O ponto *P* está, portanto, localizado no ponto comum da interseção dos planos x = 1, y = 2 e z = 3, enquanto que o ponto *Q* está localizado na interseção dos planos $x = 2$, $y = -2$ e $z = 1$.

Conforme Hayt e Buck (2003), se visualizarmos três planos cuja interseção é um ponto genérico *P*, cujas coordenadas são *x*, *y* e *z*, podemos incrementar cada valor das coordenadas de uma quantidade

diferencial, obtendo três planos levemente deslocados no ponto *P'*, cujas coordenadas são *x* + *dx*, *y* + *dy* e *z* + *dz*. Os seis planos definem um paralelepípedo retângulo cujo volume é *dV* = *dxdydz*; as superfícies possuem áreas diferenciais *dS* e *dxdy*, *dydz* e *dzdx*. Finalmente, a distância *dL* entre *P* e *P'* é a diagonal do paralelepípedo e possui um comprimento calculado conforme a equação (4).

$$C = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \qquad (4)$$

O volume elementar é mostrado na Figura 3(c); o ponto *P'* está indicado, mas o ponto *P* está localizado no único canto não visível.

### 1.4.1 Componentes vetoriais e vetores unitários

Para descrever um vetor no sistema de coordenadas cartesianas, vamos considerar um vetor **r** partindo da origem. Uma maneira de representar este vetor é utilizando um artifício de componentes vetoriais, ao longo dos três eixos coordenados, cuja soma destes é um vetor dado. Se o vetor **r** é composto por três componentes vetoriais **x**, **y** e **z**, então **r** = **x** + **y** + **z**, estes componentes são mostrados na Figura 4(a). Agora pode-se tratar com os três vetores simples, cada um direcionado ao longo dos eixos coordenados.

Os módulos dos componentes vetoriais citados anteriormente possuem módulos que dependem do vetor resultante (como o vetor **r** abaixo), ou seja, cada um com uma direção fixa nos eixos. Uma sugestão é a utilização de vetores de módulos unitários ao longo dos eixos. Portanto estes vetores podem ser chamados de $a_x$, $a_y$, $a_z$ no sistema de coordenadas cartesianas[1]. A Figura 4(b) mostra como são direcionados ao longo dos eixos *x*, *y* e *z*.

Se um componente vetorial y possui módulo de duas unidades, pode-se representar isso por $y = 2a_y$. A representação de um vetor da origem

[1] Outros autores utilizam os símbolos i, j e k para vetores unitários em coordenadas cartesianas.

apontando para o ponto P(1, 2, 3) fica $r_p = a_x + 2a_y + 3a_z$. Um vetor P a Q pode ser representado aplicando a regra da soma vetorial. Para o Q (2, –2, 1), tem-se:

$$R_{PQ} = r_Q - r_P = (2-1)a_x + (-2-2)a_y + (1-3)a_z \\ = a_x - 4a_y - 2a_z \tag{5}$$

Os vetores $\boldsymbol{r_P}$, $\boldsymbol{r_Q}$ e $\boldsymbol{R_{PQ}}$ estão mostrados na Figura 4(c). Este vetor resultante não parte da origem.
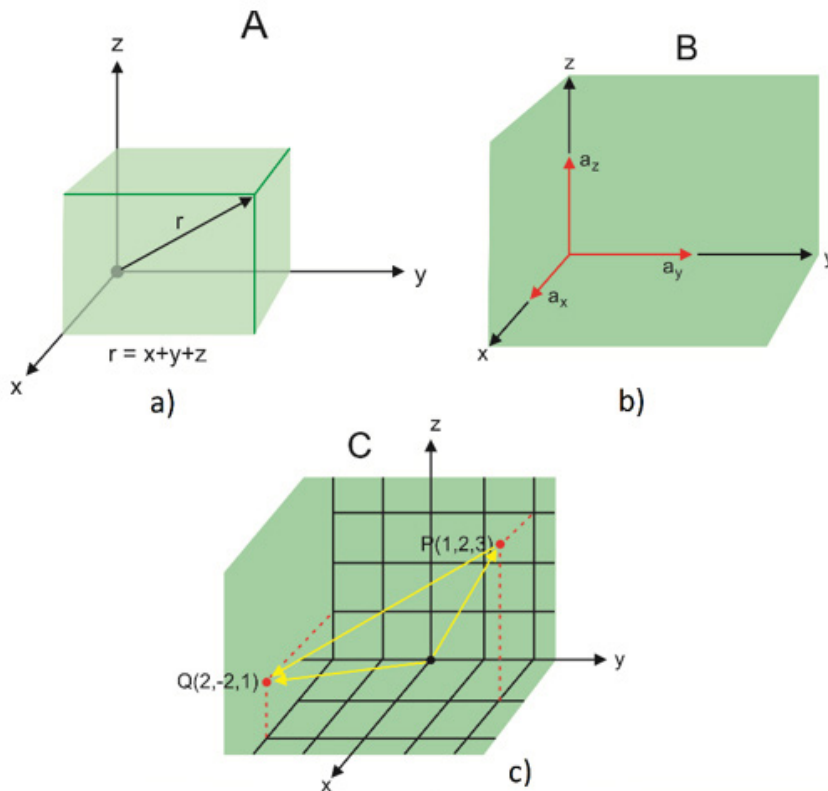
**Figura 4:** (a) As componentes vetoriais x, y e z do vetor r. (b) Os vetores unitários do sistema de coordenadas cartesianas apresentam módulo unitário e seguem o sentido crescente de suas respectivas variáveis. (c) O vetor $\boldsymbol{R_{PQ}}$ é igual ao vetor diferença $\boldsymbol{r_Q} - \boldsymbol{r_P}$.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Qualquer vetor $\boldsymbol{B}$, pode ser escrito como $B = B_x a_x + B_y a_y + B_z a_z$. O módulo de B é escrito como $|\boldsymbol{B}|$ e pode ser calculado pela equação:

$$|B| = \sqrt{B^2{}_x + B^2{}_y + B^2{}_z} \tag{6}$$

Os vetores unitários não são limitados apenas nas direções anteriores apresentadas, eles são úteis para aplicações de uma direção específica. Para um vetor qualquer, o vetor unitário na mesma direção é calculado pelo vetor dividido pelo seu módulo:

$$a_B = \frac{B}{\sqrt{B^2{}_x + B^2{}_y + B^2{}_z}} = \frac{B}{|B|} \qquad (7)$$

**Exemplo 1**

Especifique o vetor unitário dirigido da origem ao ponto G (2, –2, –1).

**Solução**:

Primeiramente, construímos o vetor dirigido da origem ao ponto G,

$$G = 2a_x - 2a_y - a_z$$

em seguida, achamos o módulo de $G$,

$$|G| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

e, finalmente, expressamos o vetor unitário desejado como o quociente,

$$a_G = \frac{G}{|G|} = \frac{2}{3}a_x - \frac{2}{3}a_y - \frac{1}{3}a_z = 0{,}667a_x - 0{,}667a_y - 0{,}333a_z$$

**Nota:** é conveniente usarmos um símbolo especial de identificação para o vetor unitário para que esta característica esteja evidente. Os símbolos que têm sido usados são $u_B$, $a_B$, $1_B$ ou mesmo $b$. Usaremos habitualmente a minúscula $a$ com um índice apropriado.

### 1.4.2 Produto escalar

Para dois vetores A e B, o produto escalar entre estes é definido como o produtor entre os módulos de A, B e o cosseno do menor ângulo entre eles:

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta_{AB} \quad (8)$$

O ponto que aparece entre eles existe para dar ênfase no tipo do modelo. O produto escalar tem como resultado um escalar e obedece à propriedade comutativa:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (9)$$

O sinal do ângulo não altera o termo cosseno. A 'expressão 8' é dita como "A escalar B".

O produto escalar de um vetor por ele mesmo é o quadrado de seu módulo:

$$A \cdot A = A^2 = |A|^2 \quad (10)$$

O produto escalar de qualquer vetor unitário por ele mesmo é igual à unidade.

$$a_A \cdot a_A = 1 \quad (11)$$

Uma das aplicações mais importantes do produto escalar é o cálculo da componente de um vetor para uma certa direção. Tomando-se como referência a Figura 5, podemos obter a componente (escalar) de **B** na direção especificada pelo vetor unitário **a** como:

$$B \cdot a = |B||a| \cos \theta_{Ba} = |B| \cos \theta_{Ba} \quad (12)$$

O sinal da componente será positivo se $0 \leq \theta_{Ba} \leq 90°$ e negativo quando $90° \leq \theta_{Ba} \leq 180°$.
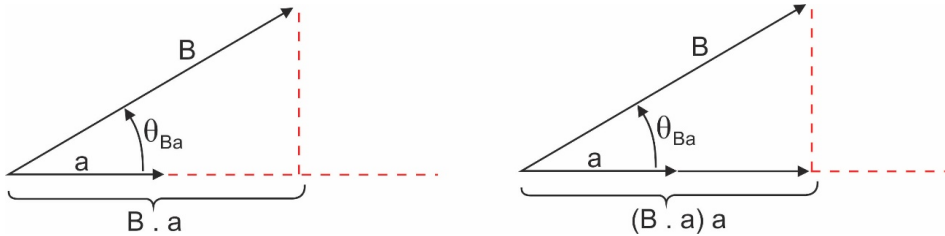
**Figura 5:** (a) A componente escalar de B na direção do vetor unitário a é B.a. (b) A componente vetorial de B da direção do vetor unitário a é (B.a)a.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Para obtermos a componente vetorial B na direção de **a**, multiplicamos a componente (escalar) por **a**, como ilustra a Figura 5. Por exemplo, a componente de B na direção de $\boldsymbol{a_x}$ é $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a_x} = \boldsymbol{B_x}$ e a componente vetorial é $\boldsymbol{B_x a_x}$ ou $(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a_x})\, \boldsymbol{a_x}$. Assim, o problema de se encontrar a componente de um vetor em qualquer direção desejada se torna o problema de encontrar o vetor unitário nesta direção, e isto nós sabemos realizar.

O termo geométrico projeção também é utilizado como produto escalar. Assim, $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}$ é a projeção de **B** na direção **a**.

## Exemplo 2

Para ilustrar essas definições e operadores, considere um campo vetorial G = $y a_x - 2{,}5 x a_y + 3 a_z$ e o ponto Q(4, 5, 2). Desejamos encontrar G no ponto Q; a componente escalar de G no ponto Q na direção de $a_n = \frac{1}{3}(2a_x + a_y - 2a_z)$; a componente vetorial de G no ponto Q na direção de $a_n$; e, finalmente, o ângulo $\theta_{Ga}$ entre G($r_Q$) e $a_N$.

**<u>Solução</u>:**

Substituindo-se as coordenadas do ponto Q na expressão de G, temos:

$$G(r_Q) = 5a_x - 10a_y + 3a_z$$

Em seguida, determinamos a componente escalar. Usando o produto escalar, temos:

$$G.a_n = (5a_x - 10a_y + 3a_z) \cdot \frac{1}{3}(2a_x + a_y - 2a_z)$$
$$= \frac{1}{3}(10 - 10 - 6) = -2$$

A componente vetorial é obtida multiplicando-se a componente escalar pelo vetor unitário na direção $a_n$,

$$(G.a_n)a_n = -(2)\frac{1}{3}(2a_x + a_y - 2a_z)$$
$$= -1{,}333a_x - 0{,}667a_y + 1{,}333a_z$$

O ângulo entre $G(r_Q)$ e $a_n$ é encontrado a partir de:

$$G \cdot a_n = |G| \cos\theta_{Ga}$$

$$-2 = \sqrt{25 + 100 + 9}\cos\theta_{Ga}$$

$$\theta_{Ga} = \cos^{-1}\frac{-2}{\sqrt{134}} = 99{,}9°$$

### 1.4.3 Produto vetorial

Dados dois vetores A e B, definiremos agora o produto vetorial entre estes escrito como *A x B*, e lido como “A vetorial B”. O produto vetorial *A x B* é um vetor; o módulo de *A x B* é igual ao produto entre A e B e a direção da resultante é perpendicular ao plano imaginário que contém A e B com duas posições possíveis, para cima ou para baixo, que estão

definidas no sentido de um parafuso imaginário (ou regra da mão direita) à medida que A é girado para B. Esta direção é mostrada na Figura 6, na maioria das nossas aplicações, estaremos interessados em vetores definidos num mesmo ponto. Podemos escrever como?
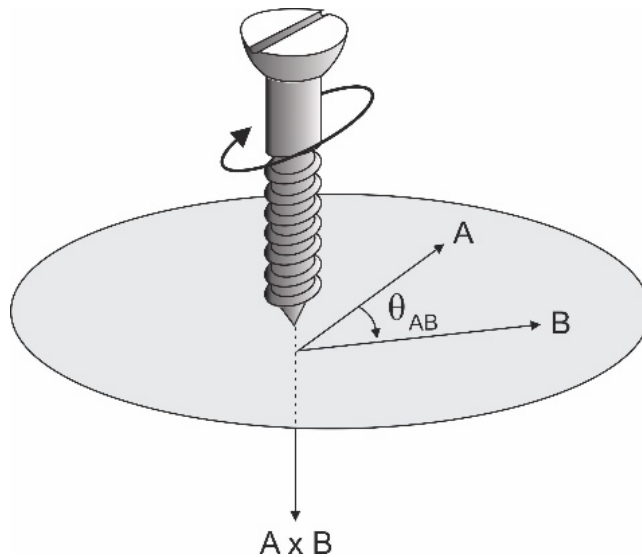
**Figura 6:** O sentido de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ é o sentido do avanço do parafuso quando este gira de A para B.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

$$A \times B = a_n |A||B| \sin \theta_{AB} \tag{13}$$

Como indicado na equação (13), é importante a explicação adicional para explicar a direção do vetor unitário $a_n$. O índice significa "normal".

A inversão da ordem dos vetores A e B (Figura 6) indica que a resultante tem direção oposta, ou seja, o produto vetorial não é comutativo, portanto $B \times A = -(A \times B)$.

Um exemplo para aplicação é o uso do produto vetorial para ser calculada a área de um paralelogramo. Usando a notação vetorial para os dois lados, podemos expressar a área (um escalar) como o módulo de *A x B* ou |*A x B*|.

Aplicando a expansão do produto vetorial e reduzindo os termos iguais a zero, temos que:

$$A \times B = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) a_z \quad (14)$$

Em forma de um determinante temos:

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (15)$$

**Exemplo 3**

Se $A = 2a_x - 3a_y + a_z$ e $B = -4a_x - 2a_y + 5a_z$, temos:

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= [(-3)(5) - (1(-2)] a_x - [(2)(5) - (1)(-4)] a_y + [(2)(-2) - (-3)(-4)] a_z$$

$$= -13a_x - 14a_y - 16a_z$$

## Resumo

Neste capítulo, tivemos a oportunidade de conhecer alguns pontos importantes da análise vetorial que é uma importante ferramenta matemática para aprofundarmos nossos estudos sobre eletromagnetismo, utilizando um plano tridimensional. Vimos a importância de conhecer os símbolos, e algumas novas regras para a resolução de problemas futuros sobre campos elétricos ou campos magnéticos.

## Referências

HAYT JR., William H; BUCK, John A.B. **Eletromagnetismo**. 6 ed. Rio de Janeiro. LTC, 2003.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 3**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 20032004.

KELLER, F.J; GETTYS, W.E; SKOVE, M.J. **Física**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1999. v. 2.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M. W.; YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física III**: eletromagnetismo. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

TIPLER, P.A.; MOSCA, G. **Física**: eletricidade e magnetismo, ótica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 2.

# Capítulo 2

# Campo elétrico, Densidade de fluxo e a Lei de Gauss

## Introdução

Após a introdução referente à análise vetorial, podemos formular alguns conceitos básicos sobre campo elétrico. Agora podemos dar mais um passo em relação aos conceitos de eletromagnetismo, para, logo adiante, termos embasamento teórico para compreender as leis de Ohm, Gauss, Coulomb, Faraday, Ampère, Biot- Savart, Kirchhoff e tantas outras conhecidas.

Vamos apresentar algumas das leis de forma matematicamente "suave" para notações vetorais.

Desta forma, nosso aprendizado, daqui em diante, em campos elétricos e magnéticos vai crescer após breve familiarização dos conceitos vetoriais.

Neste capítulo, vamos focar nossa atenção nos campos eletroestáticos no vácuo ou espaço livre.

## Objetivos

Ao final do estudo deste capítulo, você será capaz de:

- compreender diversas fontes de campo elétrico;
- executar em pequena escala a lei de Coulomb experimental;
- compreender a intensidade de campo elétrico;
- entender a utilização e a importância da lei de Gauss.

## Esquema

2.1 Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico
    2.1.1 A lei de Coulomb
    2.1.2 Intensidade do campo elétrico
2.2 Densidade de fluxo elétrico
2.3 Divergência
2.4 A lei de Gauss
    2.4.1 Linha infinita de carga
    2.4.2 Plano infinito de carga
    2.4.3 Uma casca esférica de carga
    2.4.4 Distribuição de carga com simetria esférica
2.5 O operador nabla ($\nabla$)
2.6 Energia e potencial de uma carga pontual em movimento num campo elétrico
2.7 Capacitância

## 2.1 Lei de Coulomb e Intensidade de Campo Elétrico

### 2.1.1 A lei de Coulomb

Coulomb estabeleceu que a força entre dois objetos pequenos separados no vácuo por uma distância grande, comparada com os seus diâmetros, é proporcional à carga de cada um deles e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, ou seja:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad (1)$$

em que:

$Q_1$ e $Q_2$ são quantidades das cargas positiva ou negativa em Coulomb (C);
$R$ é a distância entre os objetos em metros (m);
$k$ é a constante de proporcionalidade;
$F$ é a força em Newtons (N).

Já a constante de proporcionalidade $k$ é escrita como:

$$k = \frac{1}{4\pi \in_0} \quad (2)$$

em que:

$$\in_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} = \frac{1}{36\pi}10^{-9} \quad (3)$$

$\in_0$ é a permissividade no vácuo (F/m).

A lei de Coulomb é agora definida como:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \in_0 R^2} \qquad (4)$$

O Coulomb é uma unidade de carga grande, pois a menor quantidade de carga conhecida é a carga do elétron (negativa) ou do próton (positiva), dada no sistema MKS por $1{,}602 \times 10^{-19}$ C, assim, a carga negativa de um coulomb representa cerca de $6 \times 10^{18}$ elétrons.

Todas as outras partículas carregadas, incluindo o próton, possuem massas e raios maiores e ocupam um volume probabilístico maior que o do elétron.
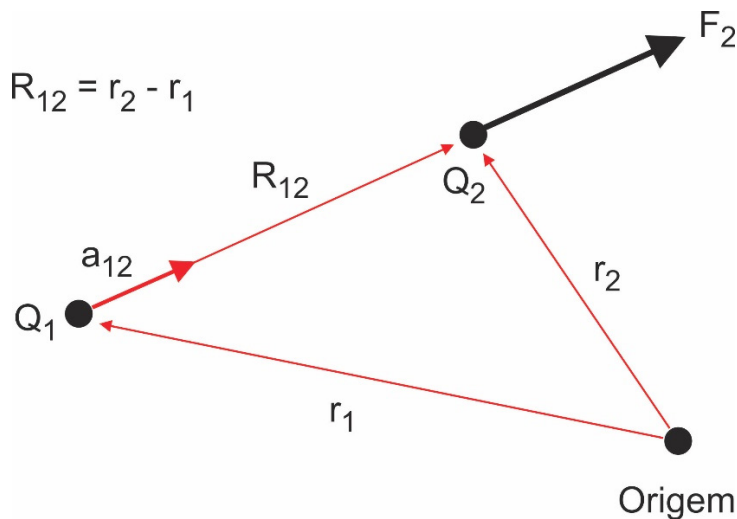
**Figura 1**: Se $Q_1$ e $Q_2$ possuem sinais iguais, o vetor força $F_2$ em $Q_2$ está na mesma direção do vetor $R_{12}$.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Para podermos escrever a forma vetorial da expressão (4), precisamos do fato adicional de que uma força atua ao longo de uma linha que une as duas cargas, e será de repulsão se as cargas forem iguais, ou de atração, se estas forem diferentes.

Seja um vetor $R_{12} = r_2 - r_1$ representa o segmento de reta orientado de $Q_1$ para $Q_2$ como mostra a Figura 1. O vetor $F_2$ é a força em $Q_2$, mostrado para o caso em que $Q_1$ e $Q_2$ possuem o mesmo sinal, nos quais a forma vetorial se torna:

$$F_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \in_0 {R_{12}}^2} a_{12} \qquad (5)$$

em que:

$a_{12}$ = vetor unitário na direção de $R_{12}$, ou:

$$a_{12} = \frac{R_{12}}{|R_{12}|} = \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} \qquad (6)$$

**Exemplo:**

Vamos ilustrar o uso da forma vetorial da lei de Coulomb, localizando uma carga de $Q_1 = 3 \times 10^{-4}$ C em M(1, 2, 3) e uma carga de $Q_2 = 10^{-4}$ em N(2, 0, 5) no vácuo. Desejamos a força exercida por $Q_1$ em $Q_2$.

**Solução:**

Faremos uso das expressões (5) e (6) para obter o vetor força. O vetor $R_{12}$ é:

$$R_{12} = r_2 - r_1 = (2-1)a_x + (0-2)a_y + (5-3)a_z$$

$$= a_x - 2a_y + 2a_z$$

Fornecendo $|R_{12}| = 3$ e o vetor unitário, $a_{12} = \frac{1}{3}(a_x - 2a_y + 2a_z)$. Assim:

$$F_2 = \frac{3 \times 10^{-4}(-10^{-4})}{4\pi \frac{1}{36\pi} 10^{-9} 3^2} \left(\frac{a_x - 2a_y + 2a_z}{3}\right)$$

$$= -30\left(\frac{a_x - 2a_y + 2a_z}{3}\right) N$$

O módulo da força é 30 N e a sua direção é apresentada pelo vetor unitário que está sendo multiplicado por este. A força em $Q_2$ pode também sem representada por:

$$F_2 = -10a_x + 20a_y - 20a_z \; N$$

A força calculada é uma força mútua, pois cada uma das duas cargas experimentam uma força de mesma magnitude, porém com sentidos contrários. Neste caso podemos escrever então como representa os vetores na Figura 1:

$$F_1 = -F_2$$

### 2.1.2 Intensidade do campo elétrico

Considerando uma carga fixa numa posição $(Q_1)$ e se movermos a outra carga $Q_2$ em torno desta, notaremos que existe uma força nesta segunda carga, em outras palavras, comprova a existência de um campo de força. Vamos chamar esta segunda carga de $Q_t$. A força pode ser representada pela prória lei de Coulomb:

$$\frac{F_t}{Q_t} = \frac{Q_1}{4\pi \in_0 R_{1t}^2} a_{1t} \qquad (7)$$

Isto descreve um campo elétrico vetorial e é denominado de **intensidade de campo elétrico**.

A intensidade do campo elétrico deve ser medida em unidades de newton por coulomb – força por unidade de carga.

Antecipando uma nova quantidade dimensional, o *volt* (V), tendo como unidade o joule por coulomb (J/C) ou newton-metros por coulomb (N.m/C), podemos medir a intensidade de campo elétrico em unidades práticas de volt por metro (V/m). Usando a letra E maiúscula para representar a intensidade do campo elétrico:

$$E = \frac{F_t}{Q_t} \tag{8}$$

$$E = \frac{Q_1}{4\pi \in_0 R_{1t}^2} a_{1t} \tag{9}$$

A equação (8) é a expressão da intensidade de campo elétrico, e (9) é a expressão da intensidade de campo elétrico devido a uma só carga pontual $Q_1$ no vácuo.

$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 R^2} a_R \tag{10}$$

Devemos relembrar que $R$ é a magnitude do vetor **R**, segmento da reta orientado do ponto, no qual a carga pontual $Q$ está localizada ao ponto, no qual **E** é desejado, e que $a_R$ é um vetor unitário na direção de **R**.

Vamos, arbitrariamente, localizar $Q_1$ no centro do sistema de coordenadas esféricas. O vetor unitário $a_R$ então se torna o vetor unitário $a_r$, e *R* é igual a *r*.

Pode-se escrever esta expressão em coordenadas cartesianas para a carga $Q$ na origem, temos $R = r = xa_x + ya_y + za_z$ e $a_R = a_r = \frac{xa_x+ya_y+za_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ; portanto:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}a_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}a_y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}a_z\right) \quad (11)$$

Sem o uso da análise vetorial, a informação contida na equação (10) teria que ser expressa com três equações, uma para cada componente, e para obtê-las teríamos que desmembrar o módulo da intensidade de campo elétrico em três componentes, encontrando a projeção em cada eixo coordenado.

Se considerarmos uma carga que não está na origem do nosso sistema de coordenadas, em que o campo não mais possui simetria esférica (nem simetria cilíndrica, a menos que a carga esteja situada no eixo x), devemos usar coordenadas cartesianas. Para uma carga Q localizada no ponto fonte $r' = x'a_x + y'a_y + z'a_z$, como mostra a Figura 2, encontramos o campo num ponto genérico $r = xa_x + ya_y + za_z$, expressando R como $r - r'$, e então:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|r-r_1|^2}\frac{r-r'}{|r-r'|} = \frac{Q(r-r')}{4\pi\epsilon_0|r-r_1|^3} = \frac{Q[(x-x')a_x + (x-x')a_x + (x-x')a_x}{4\pi\epsilon_0[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \quad (12)$$
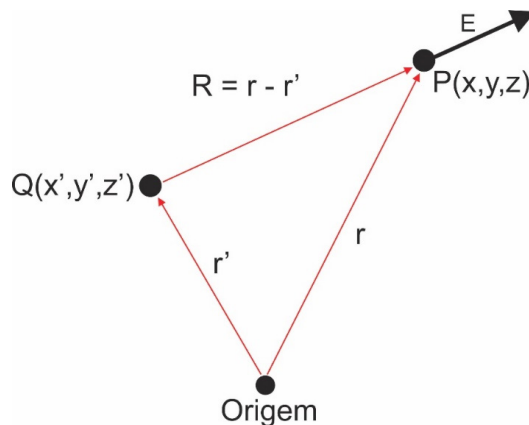
**Figura 2:** O vetor r' localiza o ponto Q da carga, o vetor r identifica o ponto genético no espaço P(x, y, z) e o vetor R de Q a P(x, y, z) e o vetor R de Q a P(x, y, z) e então $R = r - r'$.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A equação 10 é meramente um caso especial de 11, na qual $x' = y' = z' = 0$.

Como as forças de Coulomb são lineares, a intensidade de campo elétrico devido a duas cargas pontuais, $Q_1$ em $r_1$ e $Q_2$ em $r_2$, é a soma das forças $Q_t$ causadas por $Q_1$ e $Q_2$, agindo isoladamente, ou:

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|r - r_1|^2} a_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|r - r_2|^2} a_2$$

Em que $a_1$ e $a_2$ são vetores unitários na direção de $(r - r_1)$ e $(r - r_2)$, respectivamente. Os vetores $r$, $r_1$, $r_2$, $r - r_1$, $r - r_2$, $a_1$ e $a_2$ estão mostrados na Figura 3.

Se somarmos várias cargas em outras posições, o campo devido a $n$ cargas pontuais é:

$$E(r) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|r - r_1|^2} a_1 + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|r - r_2|^2} a_2 + \cdots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|r - r_n|^2} a_n \quad (13)$$
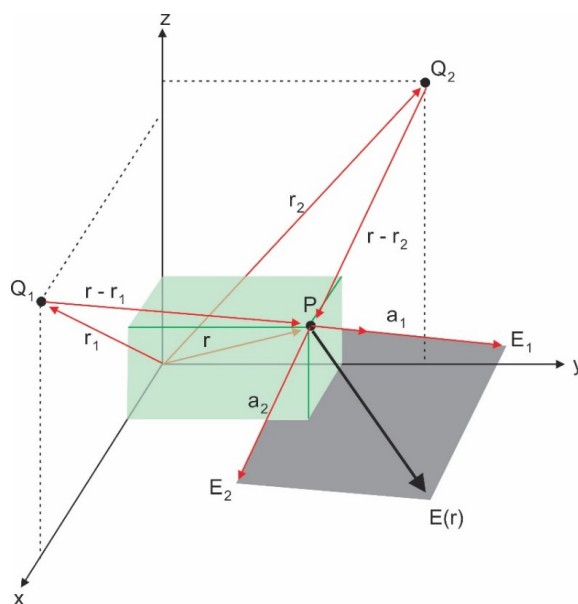
**Figura 3:** A soma vetorial da intensidade de campo elétrico total em P devido a Q1 e Q2 é possível por causa da linearidade da lei de Coulomb.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Esta expressão fica mais compacta quando usamos o símbolo de somatório e um inteiro $m$ que assume todos os valores entre 1 e $n$:

$$E(r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_0 |r - r_m|^2} a_m \quad (14)$$

**Exemplo**

Para ilustrar a aplicação das equações (13) ou (14), vamos determinar E em P(1, 1, 1) causado por quatro cargas idênticas de 3nC (nanocoulomb), localizadas em P1(1, 1, 0), P2(–1, 1, 0), P3(–1, –1, 0) e P4(1, –1, 0), como mostra a Figura 4.
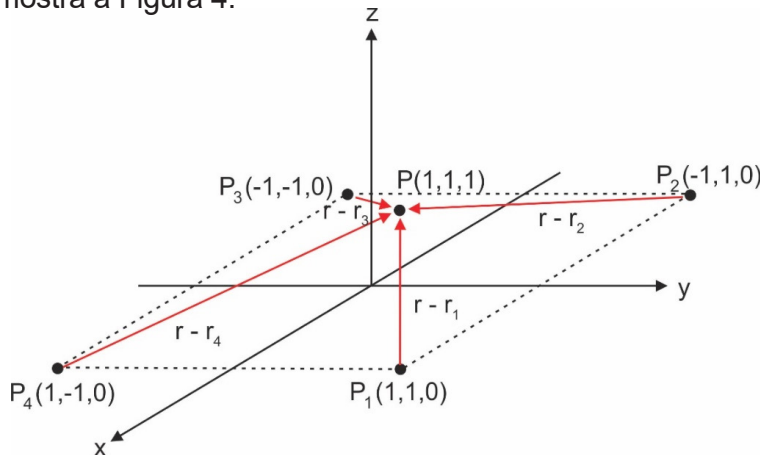
**Figura 4:** A distribuição simétrica de quatro cargas pontuais idênticas de 3nC produz um campo em P, $E = 6{,}82a_x + 6{,}82a_y + 32{,}8a_z$ V/m.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Solução:** Encontramos que $r = a_x + a_y + a_z$, $r_1 = a_x + a_y$ e, assim, $r - r_1 = a_z$. Os módulos são: $|r - r_1| = 1$, $|r - r_2| = \sqrt{5}$, $|r - r_3| = 3$ e $|r - r_3| = \sqrt{5}$. Como $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = 3 \times \frac{10^{-9}}{4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12}} = 26{,}96\ V.m$, podemos agora usar as equações (11) ou (12) para obter:

$$E = 26{,}96 \left[ \frac{a_z}{1} \frac{1}{1^2} + \frac{2a_x + a_z}{\sqrt{5}} \frac{1}{(\sqrt{5})^2} + \frac{2a_x + 2a_y + a_z}{3} \frac{1}{3^2} + \frac{2a_y + a_z}{\sqrt{5}} \frac{1}{(\sqrt{5})^2} \right]$$

ou: $E = 6{,}82a_x + 6{,}82a_y + 32{,}8a_z$ V/m

## 2.2 Densidade de fluxo elétrico

Michael Faraday, Londres, realizou estudos em 1837 com duas esferas metálicas concêntricas, mostrando que ao carregar uma das esferas levava a outra a ficar com cargas de mesma magnitude.

O fluxo elétrico deste experimento é representado por $\Phi$, e a carga total na esfera interna por $Q$, então pelo experimento de Faraday temos:

$$\Phi = Q \quad (15)$$

O fluxo elétrico é medido em coulombs.

Podemos obter outras informações quantitativas se considerarmos o raio da esfera externa igual a $a$, e o raio da esfera interna igual a $b$, com cargas $-Q$ e $Q$ respectivamente, como mostra a Figura 1. As distribuições simétricas das linhas de força são representadas simetricamente.
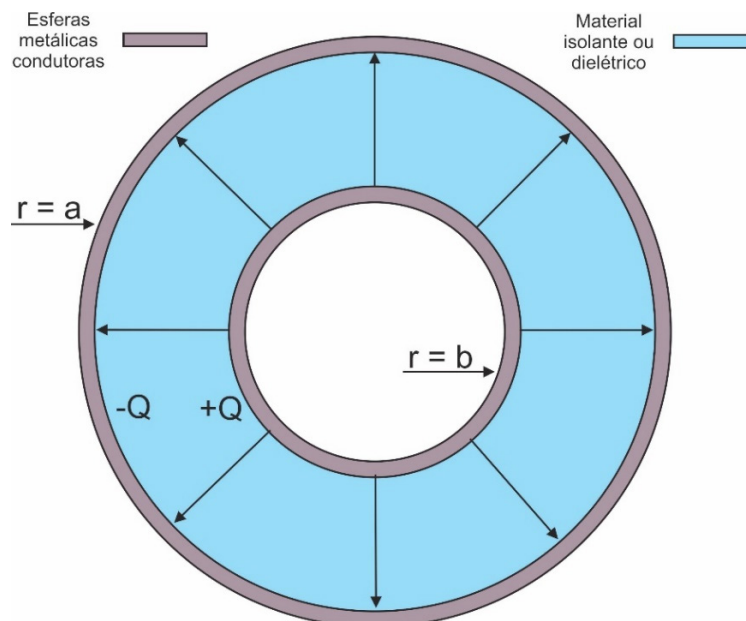
**Figura 5:** O fluxo elétrico na região entre um par de esferas concêntricas carregadas. A direção e a magnitude de D não são funções do dielétrico entre as esferas.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na superfície da esfera interna, o fluxo elétrico $\Phi$ em coulombs é produzido pela carga Q coulombs, distribuídas uniformemente sobre a superfície de área de $4\pi a^2$ $(\mathrm{m}^2)$. A densidade de fluxo nesta superfície é igual a $\Phi/4\pi a^2$ ou $\frac{Q}{4\pi a^2}$ $(\frac{C}{m^2})$.

$$D|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2} a_r \qquad \text{(esfera externa)}$$

$$D|_{r=b} = \frac{Q}{4\pi b^2} a_r \qquad \text{(esfera interna)}$$

E a distância $r$, em que $a \geq r \geq b$,

$$D = \frac{Q}{4\pi b^2} a_r \qquad (16)$$

A densidade de fluxo elétrico é medida em coulombs por metro quadrado, e representada neste material pela letra **D**.

A direção de **D** em um ponto tem a direção das linhas de fluxo que cruzam a superfície normal. Como mostra a Figura 1, a densidade de campo tem direção radial.

Se fizermos a esfera interna se tornar cada vez menor, mas mantendo a mesma carga Q, ela se tornará uma carga pontual, mas a densidade de fluxo elétrico no ponto a $r$ metros desta carga pontual será:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} a_r \qquad (17)$$

Comparando com a teoria anterior, a intensidade de campo elétrico radial de uma carga pontual no espaço livre:

$$E = \frac{Q}{4\pi \in_0 r^2} a_r \qquad (18)$$

Portanto, no espaço livre:

$$D = \epsilon_0 E \qquad \text{(somente no espaço livre)} \qquad (19)$$

Para uma distribuição volumétrica de cargas genéricas no espaço livre:

$$E = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} a_r \qquad \text{(somente no espaço livre)} \qquad (20)$$

De modo semelhante à relação anterior realizada na equação (20), temos:

$$D = \int_{vol} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} a_r \qquad (21)$$

**Exemplo**

Desejamos encontrar D na região ao redor de uma linha de cargas uniforme de $8\ nC/m$ situada no eixo $z$ no espaço livre.

**Solução:**

O campo E é:

$$E = \frac{\rho_L}{2\pi\ \epsilon_0\ d^2} a_\rho = \frac{8 \times 10^{-9}}{2\pi(8{,}854 \times 10^{-12})d^2} a_\rho = \frac{143{,}8}{d^2} a_\rho\ \ V/m$$

Em uma distância de $d^2 = 3\ m$, $E\ =\ 47{,}9\ a_\rho\ \ V/m$.

Associado ao campo **E**, encontramos:

$$D = \frac{\rho_L}{2\pi d^2} a_\rho = \frac{8 \times 10^{-9}}{2\pi d^2} a_\rho = \frac{1{,}237 \times 10^{-9}}{d^2} a_\rho\ \ C/m^2$$

O valor em $d^2 = 3m$ é $D = 0{,}424 a_\rho\ \ nC/m$.

## 2.3 Divergência

Para pequenas superfícies fechadas, podemos afirmar que:

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\int_S \frac{A\cdot dS}{\Delta v}}{\Delta v} \quad (22)$$

Em que A poderia representar velocidade, gradiente de temperatura, força ou qualquer campo vetorial.

Estas operações apareceram em muitas investigações do século passado, e receberam o nome de divergência. A divergência em A é definida como:

$$Divergência\ de\ \mathbf{A}=div\ \mathbf{A}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\int_S \frac{A\cdot dS}{\Delta v}}{\Delta v} \quad (23)$$

Conforme Hayt e Buck (2003), a divergência do vetor densidade de fluxo **A** é a descarga de fluxo em uma pequena superfície fechada por unidade de volume à medida que o volume tende a zero.

Por exemplo:  se considerarmos um fluxo de líquido de água, através de qualquer superfície fechada situada inteiramente dentro da água deve ser igual a zero, pois a água é incompressível, e a que entra na superfície é a mesma que sai desta. Portanto a divergência é igual a zero.

Portanto, se considerarmos a velocidade do ar em um pneu que acaba de ser furado por um prego, percebe-se que o ar se expande à medida que a pressão cai e que, consequentemente, há um fluxo líquido em qualquer superfície fechada situada dentro do pneu. A divergência desta é, portanto, maior que zero.

A divergência positiva de qualquer grandeza vetorial indica uma *fonte* desta naquele ponto. De forma semelhante, uma divergência negativa indica um sorvedouro. No exemplo acima (da água), a divergência é igual a zero, portanto não existe *fonte* nem *sorvedouro*.

Escrevendo em forma de equação, temos:

$$div\ D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \qquad (24)$$

Podemos considerar esta expressão em formato cartesiano, cilíndrico e esférico.

$$div\ D = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \text{ (cartesiano)}$$

**Exemplo**

Determine div **D** na origem se $D = e^{-x} sen\ y a_x - e^{-x} cos\ y a_y + 2z a_z\ c/m^2$

**Solução:**

Usamos a equação (14) ou (15) para obter:

$$div\ D = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = -e^{-x} sen\ y + e^{-x} sen\ y + 2 = 2$$

O valor é a constante, sem considerar a localização.

## 2.4 A lei de Gauss

Agora podemos abordar sobre a lei de Gauss. Suponha que haja uma quantidade de cargas positivas e negativas que estabelecem um determinado campo elétrico $\vec{E}$ ao longo de uma certa região do espaço. Hipoteticamente, constrói-se uma superfície fechada, que é chamada

de *superfície gaussiana*, que pode (ou não) envolver todas as cargas. A *lei de Gauss* relaciona o fluxo total $\Phi_E$ através dessa superfície à carga resultante q, envolvida por ela, uma permissividade elétrica $\epsilon$, ou permissividade no vácuo $\epsilon_0$ pode ser escrita como:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \tag{25}$$

ou:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}.d\vec{A} = q \tag{26}$$

O símbolo do círculo na integral significa que ele está sendo calculado sobre uma superfície fechada. A intensidade do campo elétrico é proporcional ao número de linhas de campo, atravessando um elemento de área. Conforme a equação [2], pode-se observar que o número de linhas que atravessam uma superfície seja proporcional à carga que é envolvida pela superfície. A superfície gaussiana é escolhida de forma arbitrária (Figura 6).
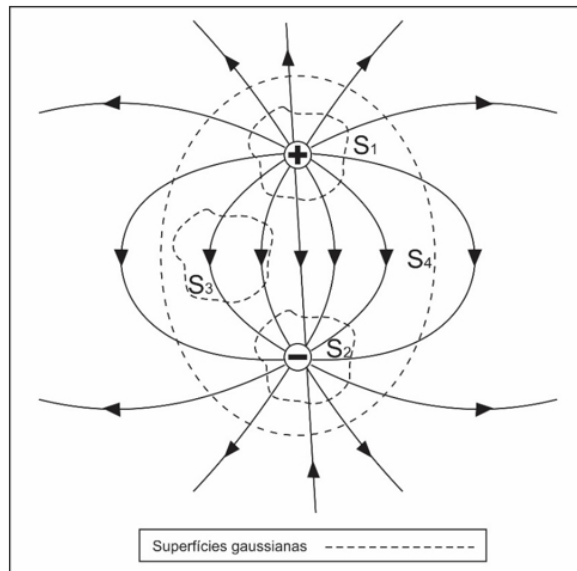
**Figura 6:** Duas cargas iguais e opostas, e as linhas que representam o campo elétrico em sua vizinhança. As seções transversais das quatro superfícies gaussianas são mostradas.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Conforme Halliday (2012), a Figura 6 mostra as linhas de força assim como as linhas de campo elétrico de um dipolo. Foram desenhadas na figura quatro superfícies gaussianas fechadas. Na superfície $S_1$, o campo elétrico aponta para fora em todos os pontos. Assim, $\vec{E}.d\vec{A}$ é positivo em todos os pontos de $S_1$. Pode-se calcular o valor com a integral da equação (26), obtendo um resultado positivo. Conforme *Faraday*, o número de linhas de força que saem da superfície é maior do que o número de linhas de forças que entram na superfície, o resultado será uma carga positiva.

Já na superfície $S_2$ da Figura 6, o campo elétrico, ao contrário do caso anterior, penetra nesta superfície em todos os pontos. Neste caso, considera-se que $\vec{E}.d\vec{A}$ é negativo para cada elemento de área, ou seja, a integral da equação (26) resulta em um valor negativo, ou seja, a superfície envolve uma carga resultante negativa.

Na superfície $S_3$, a quantidade de linhas que entram e saem do local são iguais, portanto, nesta superfície não há envolvimento de nenhuma carga.

Na superfície $S_4$, também não há envolvimento de nenhuma carga resultante, uma vez que admitiu-se a mesma intensidade para as duas cargas. Uma vez mais, o fluxo total através da superfície deveria ser nulo. Algumas das linhas de campo estão integralmente contidas na superfície e, portanto, não contribuem para o fluxo através da superfície. Para utilizar os cálculos de $\vec{E}$ de elevada simetria, alguns conceitos serão apresentados a seguir em 2.4.1 a 2.4.4.

### 2.4.1 Linha infinita de carga

A Figura 7 apresenta uma seção de uma linha infinita de carga com uma densidade linear (valor de carga por unidade de comprimento), positiva e constante $\lambda$. Deseja-se calcular o campo elétrico a uma distância *r* da linha.
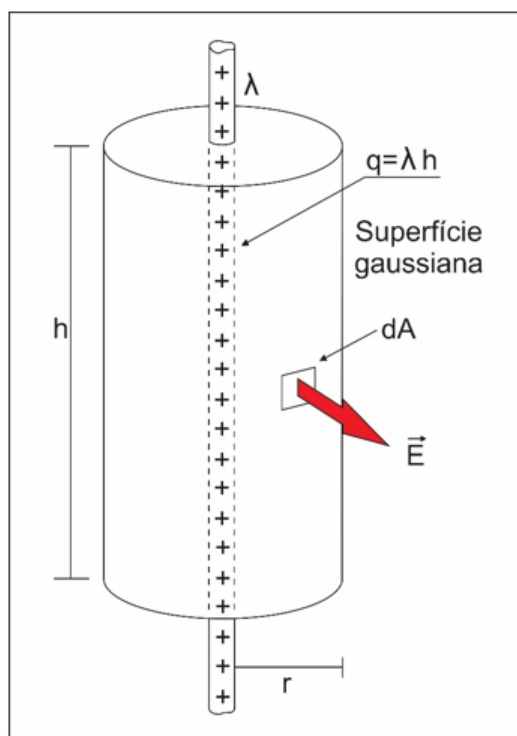
**Figura 7:** Uma superfície gaussiana na forma de um cilindro fechado circunda uma seção de uma barra cilíndrica de plástico, muito longa, uniformemente carregada.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Escolheu uma superfície gaussiana em forma de um cilíndrico de raio *r* e comprimento *h*, fechado nas extremidades por tampas planas normais ao eixo longitudinal. O valor de *E* é a constante ao longo de toda a superfície cilíndrica e perpendicular a ela. O fluxo de $\vec{E}$ através desta superfície é $E\,(2\pi rh)$, em que $2\pi rh$ é a área da superfície. Não há fluxo através das tampas porque, nessa região, $\vec{E}$ é paralelo à superfície em cada ponto, então $\vec{E}.d\vec{A} = 0$ em qualquer ponto das tampas.

A carga 'q' envolvida pela superfície gaussiana da Figura 5 é $\lambda$h. A lei de Gauss mostra que:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}.d\vec{A} = q \qquad (27)$$

$$\varepsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h \qquad (28)$$

ou:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad (29)$$

Desde que a propriedade apresente um grau de simetria, a utilização da lei de Gauss será muito útil.

### 2.4.2 Plano infinito de carga

A Figura 8 mostra uma placa fina com características não condutora e infinita de carga, com a densidade superficial de carga $\sigma$ (carga por unidade de área) constante e positiva. Agora, determina-se os campos elétricos próximos nesta placa.
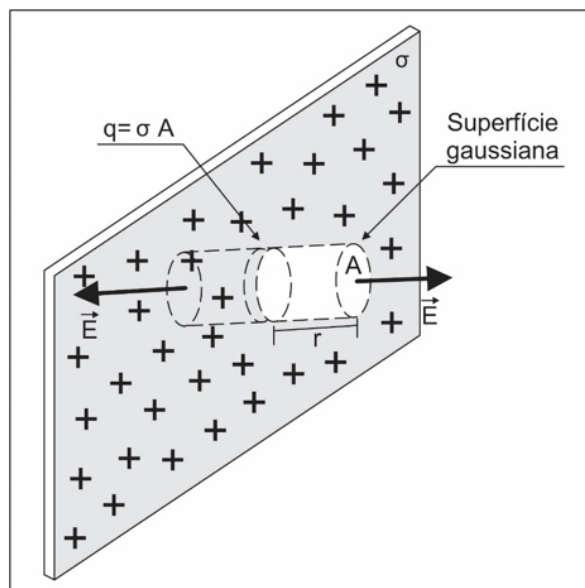
**Figura 8:** Conforme anteriormente, uma superfície gaussiana na forma de um pequeno cilindro fechado atravessa parte de uma lâmina de carga positiva. O campo é perpendicular à lâmina e, assim, apenas as extremidades da superfície gaussiana contribuem para o fluxo.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Conforme Halliday (2012), “uma superfície gaussiana conveniente para o problema é a de um cilindro fechado com seção transversal de área A, disposta de modo a transpassar a placa conforme indicado”. De acordo com esta simetria adotada, pode-se concluir que $\vec{E}$ aponta para fora dos planos nas duas extremidades do cilindro adotado. Uma vez que $\vec{E}$ não atravessa a superfície lateral do cilindro, não existe nenhuma contribuição desta para o fluxo total. Devido à simetria, o campo tem a mesma intensidade nas extremidades deste cilindro. Como cada fluxo nas extremidades é $EA$, sempre positivos dos dois lados, a lei de Gauss é:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \, . \, d\vec{A} = q \qquad (30)$$

$$\epsilon_0 (EA + EA) = \sigma A \qquad (31)$$

Em que:

$\epsilon_0$ = constante de permissividade elétrica no vácuo;
$\vec{E}$ = vetor campo elétrico;
A = área;
$q$ = carga elétrica envolvida;
$\sigma$ = densidade superficial de carga.

Na qual $\sigma A$ é a carga envolvida. Resolvendo-se a equação para E, obtém-se:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad (32)$$

### 2.4.3 Uma casca esférica de carga

Conforme Halliday (2012), os teoremas de cascas para campos elétricos podem ser resumidos da seguinte forma:

1 – Uma casca esférica uniforme carregada comporta-se, para pontos externos, como se toda a carga estivesse concentrada em seu centro.

2 – Uma casca esférica uniforme carregada não exerce nenhuma força elétrica em uma partícula carregada localizada em seu interior.

Aplicando a lei de Gauss à superfície $S$, para o caso de r > R, obtém-se:

$$\epsilon_0 E_r (4\pi r^2) = q \qquad (33)$$

ou:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \text{ (casca esférica, r > R)} \qquad (34)$$
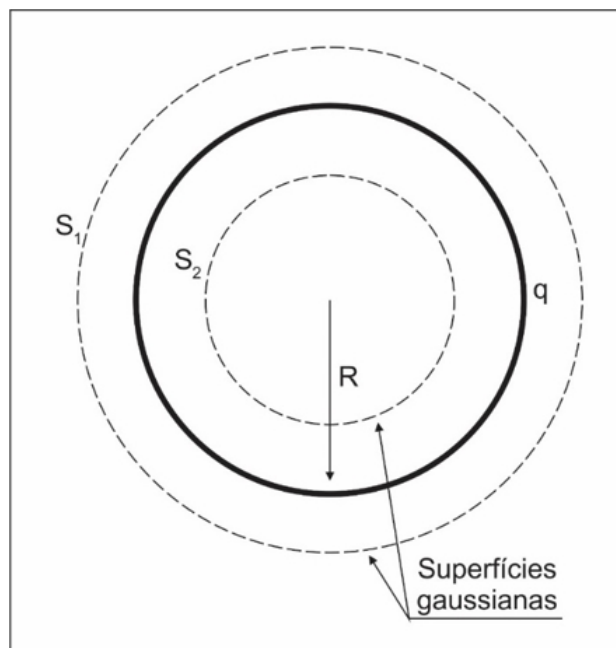
**Figura 9:** Uma seção transversal de uma casca uniformemente carregada, com uma carga q. A casca está envolvida por duas superfícies gaussianas.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 2.4.4 Distribuição de carga com simetria esférica

A figura abaixo apresenta o corte da seção de uma figura esférica com o raio R. A carga está distribuída em torno da esfera. Admitindo que a densidade volumétrica de carga *p* (carga por unidade de volume) constante. Adota-se que *p* depende, em qualquer ponto, da distância até o centro (condição de *simetria esférica* – em que *p* depende do valor de $r$, mas não de uma coordenada angular). Conforme Halliday (2012), a componente radial do campo elétrico em pontos que estejam a uma distância $r$ maior do que o raio $R$ da esfera, como indica na Figura 10 (a). Cada casca concêntrica, com uma carga $dq$ contribui com uma componente radial $dEr$. O campo total é a resultante de todas as componentes, como todas as componentes, e como elas são radiais, deve-se fazer a soma algébrica em vez da soma vetorial, portanto:

$$E_r = \int dEr = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (35)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (36)$$
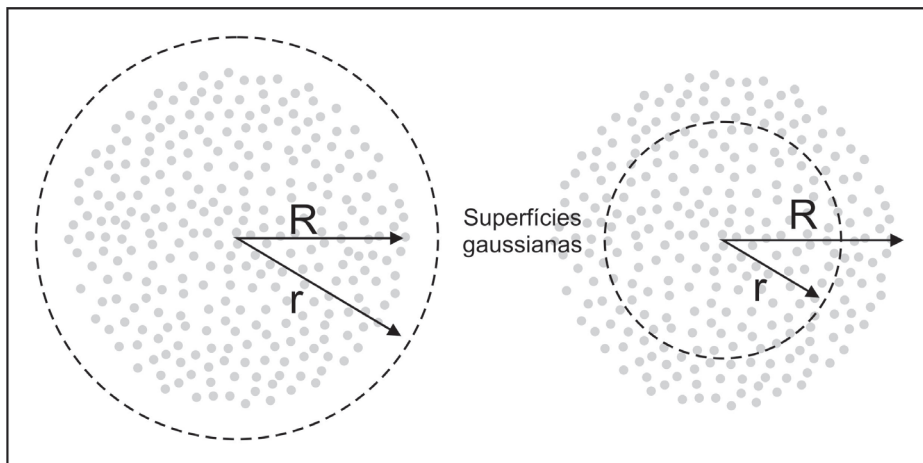
**Figura 10:** Os pontos representam uma distribuição de carga esfericamente simétrica de raio R, sendo a densidade volumétrica de carga p uma função somente da distância no centro. O objeto não é um condutor e supomos que as cargas estejam fixas em suas posições. (a) Uma superfície gaussiana esférica concêntrica em $r > R$. (b) Uma superfície gaussiana esférica concêntrica com $r < R$.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 2.5 O operador nabla ($\nabla$)

O operador nabla foi criado para facilitar a memorização de algumas principais funções matemáticas, como o gradiente, o divergente e o rotacional. Em sua expressão de definição existem espaços aguardando a função a ser derivada.

Para visualizar uma das utilizações do operador nabla, podemos fazer a seguinte analogia: imaginemos uma superfície, em forma de uma placa retangular, que você consiga colocá-la dentro de um local que exista água em movimento, ou seja, onde há água em correnteza. Como a água tem massa e velocidade, existirá uma quantidade de movimento. Os efeitos da velocidade da água sobre a superfície plana que você está segurando dentro da correnteza são diferentes, eles vão depender da orientação dessa superfície em relação à velocidade da correnteza. Pode-se perceber que quanto mais inclinada estiver essa superfície em relação à velocidade da água menor será o esforço que você fará para manter tal superfície ali, fixa, sem que ela gire em torno de um eixo tangente ao meio da placa. Se você rodar mais a placa e fizer a superfície plana ficar paralela à correnteza, irá segurar a placa com menor esforço. Porém, se a área dela estiver totalmente contra a superfície, você terá que fazer um esforço muito maior para mantê-la ali.

Esse experimento todo serve para demonstrar que a placa tende a girar ou rotacionar sob o efeito da correnteza, e que podemos representar tal correnteza por um campo vetorial.

Pode-se dizer, então, que existem vetores, ou campos vetoriais, que têm a propriedade de produzir rotações. Pode-se utilizar o operador nabla, normalmente para efetuar ou calcular essa operação rotacional em um campo vetorial, ou seja, mensurar a força de rotação desse campo vetorial.

Esse operador é representado pela letra ⊽, que é o delta invertido (Δ), e é chamado por esse nome em razão de sua forma ser semelhante à de uma antiga harpa chamada nabla.

$$\nabla = \frac{D}{\partial x}\overrightarrow{ax} + \frac{D}{\partial y}\overrightarrow{ay} + \frac{D}{\partial z}\overrightarrow{az}\, v \tag{37}$$

Em que:

$D$ = Campo vetorial que se deseja analisar.

SAIBA MAIS

O resultado do operador nabla será sempre um vetor e sua unidade será sempre a mesma do campo vetorial que estiver sendo analisado.

Trabalhando com o operador nabla dessa forma, estaremos calculando o gradiente do campo vetorial, que é a taxa de variação em relação a distância de um campo escalar, medida em determinada orientação a partir de um ponto P(x, y, z).

**Exemplo**

Calcule o valor do operador nabla no campo vetorial para o ponto indicado:

$\vec{D} = 7{,}8\frac{x^3y}{x^2z} + 12\frac{yz^2}{xyz} - 6{,}6\frac{x^3z}{xyz^2}$ C/$m^3$ C/$m^3$, P1(1, –1, 3)

**Solução:**

Primeiramente, podemos simplificar o campo o quanto possível:

$$\vec{D} = 7{,}8\frac{xy}{z} + 12\frac{z}{x} - 6{,}6\frac{x^2}{yz}$$

Agora, derivamos todo o campo vetorial em relação a x, para encontrar a componente ax. Depois, em relação a y, para encontrar a componente ay e, por último, em relação a z, para determinar a componente az.

$$\overrightarrow{ax} = 7{,}8\frac{y}{z} - 12\frac{z}{x^2} - 13{,}2\frac{x}{yz}$$

$$\overrightarrow{ay} = 7{,}8\frac{x}{z} + 0 + 6{,}6\frac{x^2z}{(yz)^2}$$

$$\overrightarrow{az} = 7{,}8\frac{xy}{z^2} + \frac{12}{x} + 6{,}6\frac{x^2y}{(yz)^2}$$

Agora, substituímos os valores:

$$\overrightarrow{ax} = 7{,}8\frac{(-1)}{3} - \frac{12(3)}{(1)^2} - 13{,}2\frac{(1)}{(-1)(3)} = 34{,}2$$

$$\overrightarrow{ay} = 7{,}8\frac{(1)}{3} + 0 + 6{,}6\frac{(1)^2(3)}{((-1)(3))^2} = 4{,}8$$

$$\overrightarrow{az} = -7{,}8\frac{(1)(-1)}{(3)^2} + \frac{12}{1} + 6{,}6\frac{(1)^2(-1)}{\left((-1)(3)\right)^2} = 12{,}13$$

Então, teremos como resultado um vetor:

$$\nabla = -34{,}2\overrightarrow{ax} + 4{,}8\overrightarrow{ay} + 12{,}13\overrightarrow{az} \quad \frac{C}{M^3}$$

**Exemplo**

Calcule o valor do operador nabla no campo vetorial para o ponto indicado:

$$\vec{D} = 34\frac{z^3y}{x^2z} - 56\frac{yxz^2}{xy^4z} + 60\frac{x^2yz^3}{x^3yz^2} \quad \frac{C}{M^3}, \qquad P2(2{,}6,-4)$$

**Solução:**

Primeiro, podemos simplificar o campo o quanto possível:

$$\vec{D} = 34\frac{z^2y}{x^2} - 56\frac{z}{y^3} + 60\frac{z}{x}$$

Agora, derivamos todo o campo vetorial em relação a x, para encontrar a componente ax. Depois, em relação a y, para encontrar a componente ay e, por último, em relação a z para determinar a componente az.

$$\overrightarrow{ax} = -68\frac{z^2y}{x^3} - 0 - 60\frac{z}{x^2}$$

$$\overrightarrow{ay} = 34\frac{z^2}{x^2} + 168\frac{z}{y^4} + 0$$

$$\overrightarrow{az} = 68\frac{zy}{x^2} - 56\frac{1}{y^3} - 60\frac{1}{x}$$

Agora, substituímos os valores:

$$\overrightarrow{ax} = -68\frac{(-4)^2(6)}{(2)^3} - 0 - \frac{60(-4)}{(2)^2} = -756$$

$$\overrightarrow{ay} = 34\frac{(-4)^2}{(2)^2} + \frac{168(-4)}{(6)^4} + 0 = 136{,}52$$

$$\overrightarrow{az} = 68\frac{(-4)(6)}{(2)^2} - \frac{56}{(6)^3} - \frac{60}{2} = -378{,}26$$

Então, teremos como resultado um vetor:

$$\overline{\mathrm{V}} = -756\overrightarrow{ax} + 136{,}52\overrightarrow{ay} - 378{,}26\overrightarrow{az}\ \frac{C}{M^3}$$

## 2.6 Energia e potencial de uma carga pontual em movimento num campo elétrico

A intensidade de campo elétrico é definida como a força numa carga de teste no ponto em que desejamos encontrar o valor do campo vetorial. Se tentarmos movimentar uma carga contra um campo vetorial, temos que exercer uma quantidade de energia ou trabalho, mas se movimentarmos esta carga a favor do campo vetorial, o consumo de energia será negativo, ou seja, quem vai exercer o trabalho sobre a carga será o campo.

A força na carga Q devido ao campo elétrico E será:

$$F_E = QE \tag{38}$$

Para uma para determinada direção, basta multiplicarmos pelo vetor unitário direcional $a_L$. O vetor $a_L$ é unitário.

$$F_E = QE \cdot a_L \tag{39}$$

A força a ser aplicada é contrária ao sentido do campo para o primeiro caso comentado anteriormente.

$$F_{apl} = -QE \cdot a_L \tag{40}$$

Portanto, o trabalho diferencial realizado pelo agente externo deslocando $Q$.

$$dW = -QE \cdot dL \tag{41}$$

E, por fim, a carga mergulhada em um campo elétrico, o trabalho necessário para deslocar a carga de uma distância finita deve ser calculado pela seguinte integração:

$$W = -Q \int_{inic}^{final} E \cdot dL \qquad (42)$$

O caminho deve ser especificado antes de iniciar a integração.

## 2.7 Capacitância

Vamos agora considerar dois condutores mergulhados em um dielétrico homogêneo. Na Figura 11, o condutor $M_1$ carrega cargas positivas (+) Q, e $M_2$ carrega uma carga de mesma intensidade, porém de sinal contrário (–). Portanto, a somatória de cargas totais é igual a zero.
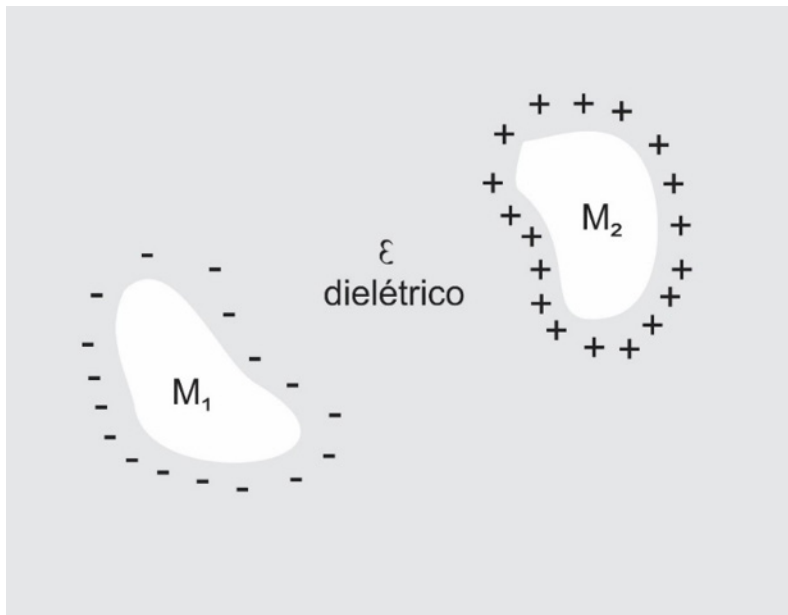
**Figura 11:** Dois condutores com cargas opostas $M_1$ e $M_2$ envolvidos por um dielétrico uniforme. A razão da intensidade da carga em um dos condutores pela magnitude da diferença de potencial entre eles é a capacitância C.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Pode-se afirmar que a carga é carregada na superfície como uma densidade superficial de carga e o campo elétrico é normal à superfície do condutor. Cada condutor é uma superfície equipotencial. Como $M_2$ carrega as cargas positivas, temos o fluxo elétrico de $M_2$ para $M_1$.

Designando a diferença de potencial entre $M_2$ e $M_1$ igual a $V_0$, pode-se relacionar a capacitância como:

$$C = \frac{Q}{V_0} \tag{43}$$

A capacitância depende apenas das dimensões físicas do sistema dos condutores e da permissividade do dielétrico.

A capacitância é medida em Farads (F), em que um $\boldsymbol{farad}$ é definido como um $\boldsymbol{coulomb}$ por $\boldsymbol{volt}$. Na prática os valores de capacitância geralmente são em microfarad ($\mu F$), nanofarad ($nF$) e picofarad ($pF$).

Aplicando a definição de capacitância num sistema simples de dois condutores no qual os condutores são planos, paralelos e infinitos com a mesma distância de separação *d* (Figura 12). Escolhendo o plano condutor inferior em $z = 0$ e o superior em $z = d$, uma lâmina de carga superficial uniforme $\pm\rho_S$, os condutores geram o campo uniforme.
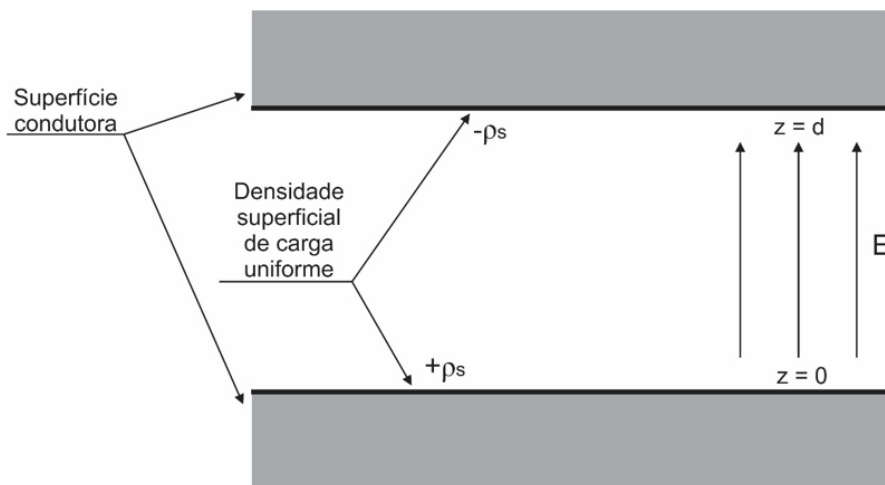
**Figura 12:** O problema do capacitor de placas paralelas. A capacitância por metro quadrado de superfície é $\epsilon/d$.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Segundo Hayt e Buck (2003), temos que:

$$E = \frac{\rho_S}{\epsilon} a_z \qquad (44)$$

Em que a permissividade do dielétrico homogêneo é $\epsilon$ e:

$$D = \rho_S a_z \qquad (45)$$

A carga no plano inferior deve então ser positiva, sendo que $D$ está dirigido para cima e o valor normal de $D$ é:

$$D_N = D_z = \rho_S \qquad (46)$$

Sendo igual à densidade superficial de carga ali. No plano superior:

$$D_N = -D_z \qquad (47)$$

Sendo a densidade de carga negativa naquele plano superior.

A diferença de potencial entre os planos inferior e superior é:

$$V_0 = \int_{superior}^{inferior} E \cdot dL = -\int_d^0 \frac{\rho_S}{\in} dz = \frac{\rho_S}{\in} d \qquad (48)$$

Como a carga total em ambos os planos é infinita, a capacitância é infinita. Obtém-se uma resposta mais prática, considerando-se planos de área $S$ cada um, cujas dimensões lineares são muito maiores que sua separação $d$. O campo elétrico e a distribuição de carga são, então, quase uniformes em todos os pontos não adjacentes às bordas, e esta última região contribui somente com uma pequena porcentagem da capacitância total, permitindo-nos escrever o resultado:

$$Q = \rho_S S$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\in S}{d} \qquad (49)$$

**Exemplo**

Calcule a capacitância de um capacitor de placas paralelas tendo como dielétrico a mica, $\in_R = 6$, uma placa de área $10\ in^2$ e uma separação de $0{,}01\ in$.

**Solução**

Podemos encontrar que:

$$S = 10 \times 0{,}0254^2 = 6{,}45 \times 10^{-3}\ \ m^2$$

$$d = 0{,}01 \times 0{,}0254 = 2{,}54 \times 10^{-4}\ \ m$$

E, portanto,

$$C = \frac{6 \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 6{,}45 \times 10^{-3}}{2{,}54 \times 10^{-4}} = 1{,}349\ \ nF$$

Por fim, a energia armazenada no capacitor é:

$$W_E = \frac{1}{2} C {V_0}^2 = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \qquad (50)$$

## Resumo

Neste capítulo, tivemos a oportunidade de conhecer os estudos sobre campo elétrico utilizando o plano tridimensional. Já podemos imaginar a importância destes conhecimentos para as disciplinas posteriores como circuitos elétricos. Enfocamos as modelagens matemáticas para assuntos de fluxos elétricos e a lei de Gauss.

## Referências

HAYT JR., William; BUCK, John A. **Eletromagnetismo**. 6 ed. Rio de Janeiro. LTC, 2003.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 3**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 20032004.

KELLER, F.J; GETTYS, W.E; SKOVE, M.J. **Física**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1999. v. 2.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M. W.; YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física III**: eletromagnetismo. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

TIPLER, P.A.; MOSCA, G. **Física**: eletricidade e magnetismo, ótica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 2.

Capítulo 3

# Campo magnético estacionário, a Lei de Faraday

## Introdução

Neste capítulo os conceitos iniciais sobre campo magnético serão introduzidos para familiarizar os alunos com o conteúdo.

Conforme visto no capítulo anterior, os campos elétricos não contêm massa, porém existem forças devido a estes campos entre uma carga pontual e outra carga teste. Agora vamos dedicar este capítulo para abordar um novo conceito: campo magnético, que é um pouco diferente do campo elétrico, visto anteriormente.

No início vamos apresentar a definição de campo magnético e mostrar como ele surge a partir da distribuição de corrente.

Assim como o capítulo anterior, vamos focar nossa discussão inicial às condições de espaço livre.

O campo magnético estacionário e a sua fonte são mais complexos do que o campo eletroestático e a sua própria fonte.

## Objetivos

Ao final do estudo deste capítulo, você será capaz de:

- compreender a base sobre campos magnéticos;
- visualizar o desenho do mapa das linhas de campo magnético;
- compreender o surgimento do campo magnético devido à corrente elétrica;
- algumas leis e suas aplicações.

## Esquema

## 3.1 Campo magnético

O campo magnético é o efeito gerado por correntes elétricas ou por materiais com capacidade de manter propriedades magnéticas, mais conhecido como *imã*. O campo magnético, em qualquer dado ponto, é especificado por ambas direções e magnitudes, pode ser representado por um campo vetorial (Figura 1).
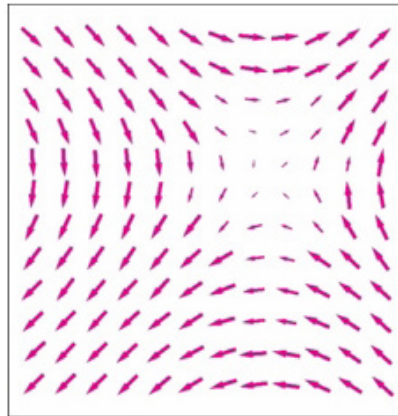
**Figura 1:** Representação gráfica de um campo vetorial, o módulo do vetor campo em qualquer ponto é proporcional ao comprimento da seta.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O termo utilizado é usado para dois diferentes, mas bem relacionados, campos denominados pelo símbolo B e H, em que a unidade de H é medida em Ampere por metro ($A/m$ ou $A.m^{-1}$) em SI. Já o campo B é medido em Tesla (T) que equivale a Newton por metro por Ampere ($N.m^{-1}.A^{-1}$ ou $N/(m.A)$) em SI. É mais comum a definição para B em termos de força de Lorentz, que exercem sobre o movimento de cargas elétricas.
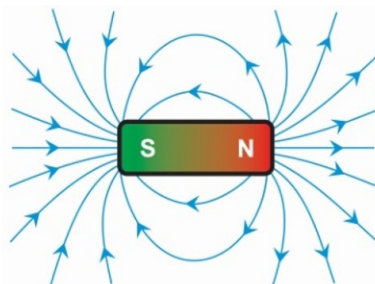
**Figura 2:** Representação de um imã permanente com a orientação de seu campo magnético.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na Figura 2, apresenta-se o campo magnético de um imã cilíndrico ideal com simetria. O campo magnético é mostrado neste desenho, por linhas de direções do campo em diferentes pontos.

Os campos magnéticos podem ser produzidos movendo cargas elétricas ou pelo momento magnético das partículas elementares associadas à sua própria propriedade quântica, o spin. É interessante citar que campos elétricos e magnéticos são dois aspectos inter-relacionados para um mesmo objeto.

No senso comum, campos magnéticos são geralmente notados pela sua força gerada através de ímãs permanentes, que atraem materiais ferromagnéticos, tais como ferro, cobalto ou níquel e, dependendo da situação, repelem outros magnetos.

Campos magnéticos são largamente utilizados durante toda modernização tecnológica, particularmente em engenharia elétrica e eletromecânica. O planeta terra produz seu próprio campo magnético, que é importante na utilização das navegações, e para servir como “escudo” da atmosfera terrestre contra os ventos solares. Os campos magnéticos girantes são uma das principais características de funcionamento dos atuais motores e geradores elétricos. As forças magnéticas informam sobre portadores de cargas em um material através do conhecido efeito Hall. A interação dos campos magnéticos em dispositivos elétricos tal como transformadores são os principais objetivos de estudo em disciplinas de conversão de energia.

### 3.1.1 Linhas de campos magnéticos

Mapear o campo magnético de um imã é uma tarefa considerada simples em princípio. Primeiro passo é medir a força e direção do campo magnético em um grande número de localizações diferentes (ou em todos os pontos no espaço). Então marque cada local com uma flecha

(chamada de vetor), apontando na direção do local do campo magnético com esta magnitude ou o tamanho do vetor proporcional à força do campo magnético naquele ponto medido. Um campo vetorial, como apresentado na Figura 1, pode ser uma ferramenta muito interessante para demonstração deste método. As utilizações de bússolas podem revelar com facilidade a direção das “linhas” de campo magnético. Estes equipamentos têm a característica de, quando inseridos em um campo magnético, apontarem para o polo sul do imã, como mostra a Figura 3.
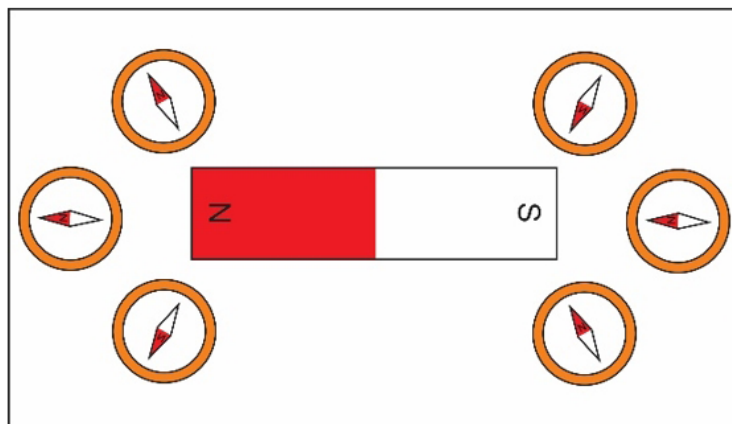
**Figura 3:** A utilização de bússolas para a identificação da trajetória do campo magnético de um imã permanente.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Um método alternativo para mapear o campo magnético é de “conectar” as flechas para formar linhas de campo magnético. A direção do campo magnético em qualquer ponto é paralela à direção próxima às linhas de campo. A densidade de campo local das linhas pode ser proporcional à sua força.

Linhas de campo magnético são como linhas de fluxo de um fluído qualquer, que representam alguma quantidade contínua, e para caracterizar diferentes resoluções, basta apresentar no desenho mais ou menos linhas. A vantagem em utilizar linhas de campos magnéticos como representação é que muitas leis do magnetismo (e eletromagnetismo) podem ser utilizadas de forma completa e concisa, usando simples conceitos tais como o “número” de linhas de campo que atravessam uma superfície. Estes conceitos podem

ser rapidamente “traduzidos” para suas formas matemáticas. Por exemplo, o número de linhas de campo através de uma dada superfície é a superfície integral do campo magnético.

Vários fenômenos têm o efeito de “exibir” as linhas de campo magnético como se as linhas de campo magnético fossem um fenômeno de linhas físicas. Por exemplo, limalhas de aço, colocadas em um campo magnético, formam trajetos que correspondem a “linhas de campo” (Figura 4). Essas linhas de campo magnético também podem ser exibidas visualmente na natureza em auroras polares, nas quais os dipolos da partícula de plasma interagem, criando visíveis listras de luz que alinham com a direção local do campo magnético terrestre.
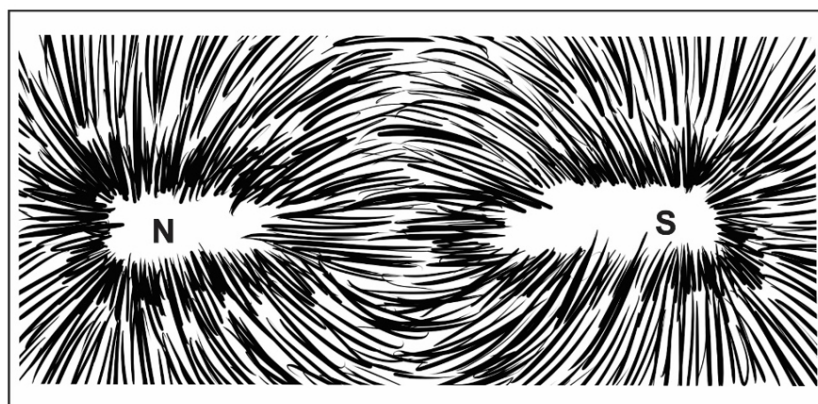
**Figura 4:** Linhas de campos magnéticos de um imã permanente representadas pelo alinhamento de limalhas de aço colocadas em cima de um papel.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Linhas de campo podem ser usadas como ferramenta qualitativa para visualizar forças magnéticas. Em substâncias ferromagnéticas como o ferro, forças magnéticas podem ser entendidas imaginando que as linhas de campo exercem uma tensão mecânica (igual à borracha elástica) ao longo do seu próprio comprimento, e uma pressão perpendicular ao longo de linhas de campos vizinhas. De forma distinta, os polos diferentes de magnetos atraem-se por causa de suas ligações com mais linhas de campo, e polos iguais que se repelem porque suas linhas de campos não se encontram, mas correm paralelas, empurrando um ao outro.

### 3.1.2 Campo magnético e imãs permanentes

Os imãs permanentes são objetos que produzem suas próprias linhas de campo magnéticos contínuas. Estes efeitos podem ser observados em materiais ferromagnéticos, tais como o ferro e o níquel, depois de magnetizados e, por consequência, criando ambos os polos, norte e sul.

### 3.1.3 O Campo magnético de imãs permanentes

O campo magnético de ímãs permanentes pode ter diferentes trajetórias que dependem de toda a geometria do imã, especialmente próximos dos magnetos. A força de um material magneto é proporcional ao campo produzido por vários pequenos imãs infinitamente pequenos e retos que é construído este (chamado de momento do dipolo magnético *m*). As equações não são geralmente conhecidas e também dependem da distância e orientação do ímã.

Girar a barra do ímã (invertendo seus polos) equivale a uma rotação de m em 180º. O campo magnético de ímãs maiores pode ser obtido pela modelagem destes pequenos dipolos como uma somatória do efeito da quantidade dos pequenos ímãs, tendo cada um seu próprio efeito do *m*. O campo magnético produzido por um ímã então é o valor líquido de campos magnéticos destes dipolos. E qualquer força líquida no imã é resultado da somatória de forças dos dipolos individuais.

### 3.1.4 Campo magnético e correntes elétricas

As correntes elétricas percorridas em um condutor geram um campo magnético em torno do fio, e outros campos vizinhos sofrem forças devido aos campos magnéticos B criados.

## 3.2 Campos magnéticos devido ao movimento de cargas ou correntes elétricas

Todas as partículas carregadas em movimento produzem campos magnéticos. Ao mover cargas pontuais, tais como elétrons, produzem complexos, porém bem conhecidos campos magnéticos que dependem da carga, velocidade e aceleração destas partículas.

As linhas de campo magnético formam círculos concêntricos em torno da forma cilíndrica ao longo do fio quando são percorridos por correntes elétricas. A direção de tal campo magnético pode ser determinada usando a regra da mão direita, como mostra a Figura 5. A força do campo magnético diminui com o aumento da distância do fio.
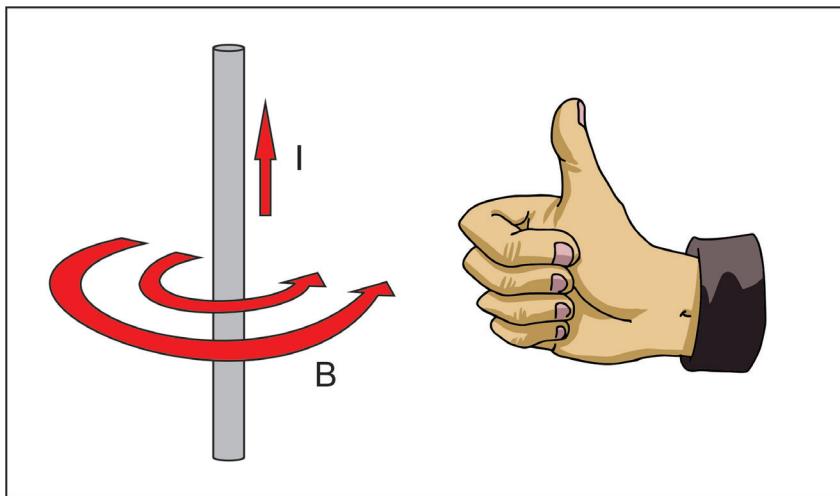
**Figura 5:** Regra da mão direita (regra do saca rolha): uma corrente flui na direção da seta branca, produzindo um campo magnético, mostrado pelas setas vermelhas.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Dobrando um fio (criando loop) que transporta a corrente, concentra-se o campo magnético dentro deste loop como mostra a Figura 6.
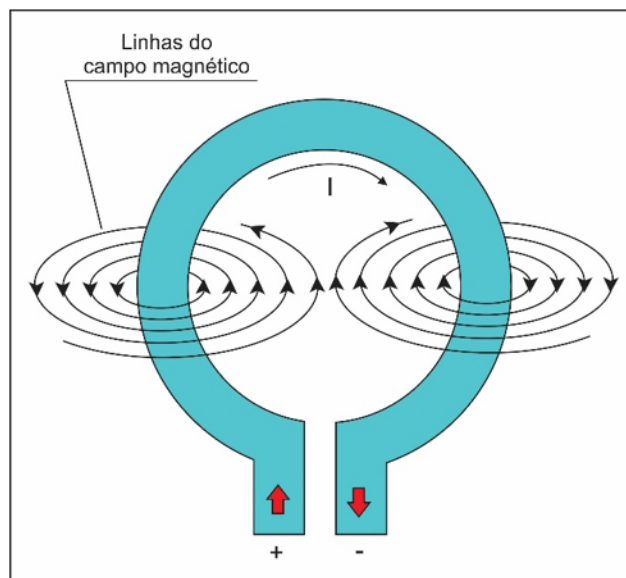
**Figura 6:** Uma espira (loop), percorrido por uma corrente elétrica I.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Portanto, ao dobrar o fio em múltiplas voltas em torno de espaços dos loops, pode-se formar uma bobina ou solenoide (Figura 7), aumentando o efeito do campo magnético produzido. Um dispositivo, então enrolado entorno de um núcleo de ferro, pode atuar como um eletroímã, geralmente a força do campo magnético que pode ser controlada através do nível da corrente da bobina. Um eletroímã de comprimento finito produz um campo magnético que parece igual ao produzido por um ímã permanente, com a força e polaridade determinada pelo fluxo de corrente através da bobina.
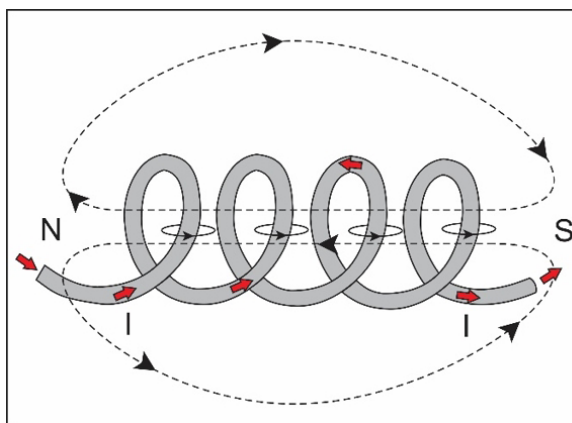
**Figura 7:** Linhas de campo percorrida em uma bobina.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 3.3 Campo magnético estacionário

Até agora vimos sobre o campo elétrico, e este nos parece familiar. Como mostrado nos tópicos anteriores as leis experimentais apresentaram as forças existentes entre duas cargas pontais e a definição da intensidade do campo elétrico como força por unidade de carga sobre uma carga teste.

Conforme o nosso estudo, mostramos o efeito do campo sobre a cargas-fontes e o efeito destas cargas sobre o campo.

Vamos iniciar os nossos estudos sobre como campos magnéticos surgem a partir da distribuição de corrente.

A relação entre o campo magnético estacionário e sua fonte é mais complexa que a relação entre o campo eletrostático e sua fonte.

## 3.4 Lei de Biot-Savart

As fontes de campos magnéticos podem ser criadas por ímãs permanentes, a corrente contínua ou alternada em relação ao tempo percorrido num condutor.

Portanto, a lei de Biot-Savart diz respeito ao campo magnético, que também é produzido por um elemento de corrente contínua. A lei de Biot-Savart enuncia que em qualquer ponto a intensidade do campo magnético produzido por um elemento diferencial é proporcional à magnitude do produto da corrente, do comprimento diferencial e pelo seno do ângulo que liga a linha que conecta um determinado filamento ao ponto, no qual o campo é desejado. Essa lei também possui o quadrado da distância no denominador, indicando que a intensidade de campo magnético em um determinado ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do elemento diferencial.
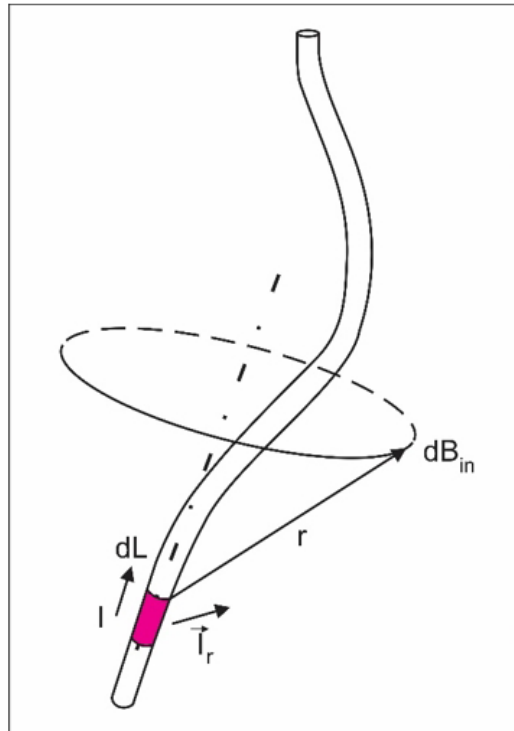
**Figura 8:** Condutor sendo percorrido por uma corrente I.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

$$dB = \frac{\mu_0 I \overrightarrow{ds}.\sin\theta}{4\pi r^2} \quad (1)$$

Ou de forma vetorial:

$$dB = \frac{\mu_0 I \overrightarrow{ds}.\hat{\mathrm{r}}}{4\pi r^2} \quad (2)$$

Em que:

$\overrightarrow{dL}$ = comprimento infinitesimal do condutor que transporta a corrente elétrica I;
$\overrightarrow{\mathrm{r}_r}$ = vetor unitário para especificar a direção da distância vetorial **r** do ponto atual para o campo;
$\mu_0$ = permeabilidade magnética no vácuo ($4\pi \times 10^{-7} H/m$).

A lei de Biot-Savart lembra a lei de Coulomb, quando escrita para um elemento diferencial de carga. Ambas mostram a dependência com o inverso do quadrado da distância.

A direção do vetor intensidade de campo magnético é circunferencial. As linhas de força são, portanto, círculos ao redor do filamento, e o campo pode ser mapeado em uma seção transversal como mostra a Figura 9.
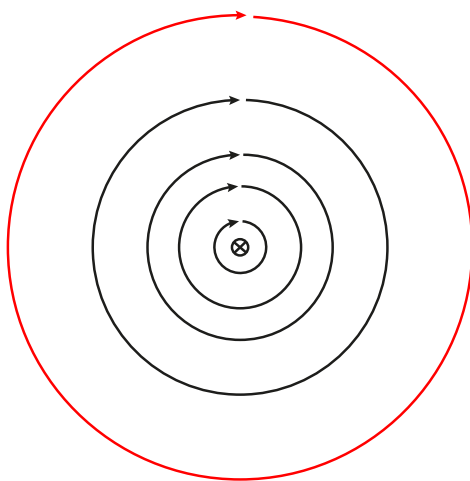
**Figura 9:** As linhas de força da intensidade de campo magnético em torno de um filamento retilíneo infinitamente longo conduzindo uma corrente direta I, A direção de I é para dentro da página.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

As linhas de força do campo magnético correspondem às superfícies equipotenciais do campo elétrico, conforme abordado no capítulo anterior.

Veja na Figura 8 o campo magnético esboçado do fio direto para ver a geometria do campo magnético de uma corrente.

Agora analisando o efeito da equação 2 para um circuito fechado, pode-se relacionar como:

$$B = \mu_0 \oint \frac{I\overrightarrow{ds}.\hat{r}}{4\pi r^2} \qquad (3)$$

O uso da lei de Biot-Savart para encontrar H é, em muitos aspectos, semelhante ao uso da lei de Coulomb para encontrar E.

### 3.4.1 Contribuição do campo magnético de um elemento

Cada elemento de corrente infinitesimal contribui para o campo magnético no ponto P que é perpendicular ao elemento atual e perpendicular ao vetor do raio do elemento ao ponto de campo P.
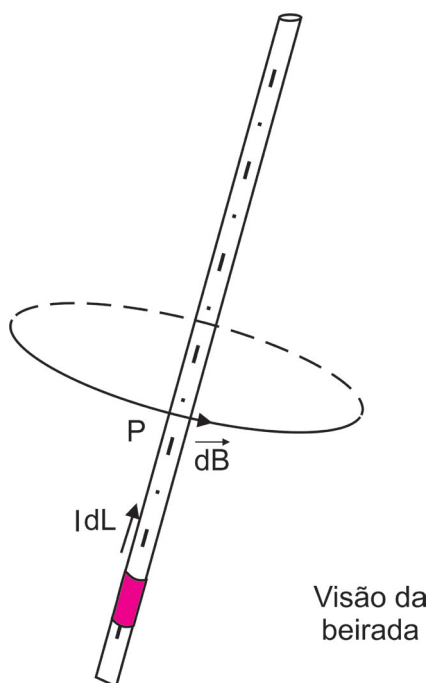
**Figura 10:** O $d\vec{B}$ é a contribuição do campo magnético em P a partir do elemento $Id\vec{L}$
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A lei Biot-Savart é algumas vezes chamada de lei de Ampère para o elemento de corrente, mas vamos manter o primeiro nome para não causar confusão com outro ponto abordado neste livro.

A direção da contribuição do campo magnético segue a regra da mão direita, Figura 5 “saca rolhas”, para um fio retilíneo. Esta direção decorre da natureza do produto vetorial da dependência da corrente elétrica.

## 3.5 Lei circuital de Ampère

Nós já observamos em tópicos anteriores que, para resolver alguns problemas simples de eletroestática para campo elétrico com a lei de Coulomb, poderia ser usada a lei de Gauss, desde que uma simetria existisse. Existe um procedimento análogo em relação aos campos magnéticos. A lei que apresenta relação é chamada de lei circuital de Ampère.

Esta lei pode ser criada através da lei de Biot-Savart. Semelhante à lei de Gauss, esta necessita de uma determinada simetria, para determinar as relações das variáveis presentes.

A lei circuital de Ampère diz que a integral de linha, em qualquer caminho fechado, é igual à corrente envolvida neste.

$$\oint H \cdot dL = I \tag{4}$$

A corrente positiva é mostrada pela regra da mão direita, como apresentado anteriormente.

A Figura 11 mostra que a integral de linha no caminho fechado a e b apresentam o valor da corrente I, já pela integral de linha no caso c, o valor de I é menor. Portanto, não levando em consideração o trecho percorrido, o objetivo é calcular o caminho completamente percorrido. Como H pode variar em alguns micrometros de dL no cálculo, o resultado final com o caminho percorrido fechado em a e b será o mesmo por ter envolvido todo o condutor.
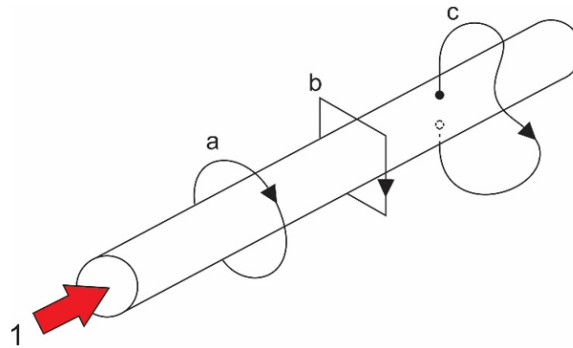
**Figura 11:** Um condutor tem uma corrente total I. A integral de linha de H em torno dos caminhos fechados a e b é igual a I e a integral em torno do caminho c é menor do que I, já que toda a corrente não é envolvida pelo caminho.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Portanto, o caminho fechado é, às vezes, muito simples e pode ser desenhado.

Ja lei circuital de Ampère é realizada para determinar a corrente envolvida por uma superfície fechada.

Considerando o caminho sendo um círculo de raio $\rho$, a lei circuital se torna:

$$\oint H \cdot dL = \int_0^{2\pi} H_\emptyset \, \rho d\emptyset = H_\emptyset \rho \int_0^{2\pi} d\emptyset = H_\emptyset 2\pi\rho = I$$

Ou:

$$H_\emptyset = \frac{I}{2\pi\rho}$$

### 3.5.1 Solenoide da Lei de Ampère ou Solenoide Campo da Lei de Ampère

O caminho retangular o exposto na Figura 12, sobre o qual avaliar a Lei de Ampère, de modo que o comprimento do lado paralelo ao campo solenoide seja L, dá uma contribuição BL dentro da bobina. O campo é essencialmente perpendicular aos lados do caminho, dando uma contribuição insignificante.

Se o fim é levado tão longe da bobina que o campo é insignificante, então o comprimento dentro da bobina é a contribuição muito significante nos cálculos.
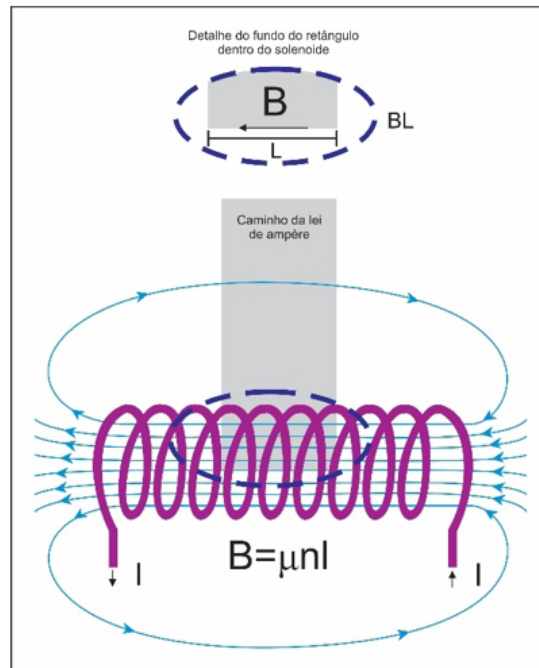
**Figura 12:** Uma bobina percorrida por uma corrente I.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Este caso, idealizado para a Lei de Ampère, dará:

$$BL = \mu NI \tag{5}$$

$$B = \mu \frac{N}{L} I \tag{6}$$

$$B = \mu n I \tag{7}$$

Em que:

$n$ = número de voltas dividido pelo comprimento adotado nos cálculos ($\frac{N}{L}$);
$\mu$ = permeabilidade magnética;
$I$ = corrente elétrica;
$B$ = intensidade do campo magnético.

Isso resulta em uma boa aproximação para o campo do solenoide, particularmente no caso de um solenoide do núcleo de ferro.

### 3.5.2 Campo magnético do toroide

Encontrar o campo magnético dentro de um toroide é um bom exemplo do poder da lei da *Ampère,* como mostra a Figura 13. O fluxo fechado pela linha tracejada é o número de loops vezes a corrente em cada loop. A lei *Ampères* fornecerá então o campo magnético.

$$B2\pi r = \mu NI$$

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r} \tag{8}$$
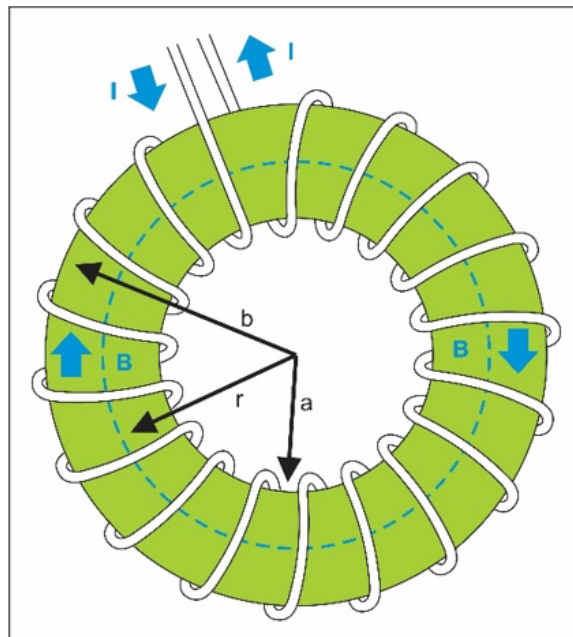
**Figura 13:** Exemplo de um toroide.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O toroide é um dispositivo útil usado em vários sistemas, desde filtros, até reatores de fusão nuclear.

## 3.6 Rotacional

O rotacional pode ser descrito como uma circulação por unidade de área. O rotacional é sempre definido em um ponto. Uma das formas de se compreender o rotacional é utilizando uma pequena roda de pás proposta por Skilling (1948).

Skilling propõe utilizar uma pequena roda de pás para medir o rotacional, pois a força aplicada na superfície de cada pá é proporcional ao componente do campo vetorial.

Imaginemos que colocaremos nossa roda de pás em um campo vetorial, com o eixo alinhado na direção da componente do rotacional desejado, para visualizarmos a ação do campo na roda. Se não houver movimento, ou seja, se a roda não girar, quer dizer que não há rotacional. Quanto mais forte a roda girar, maior será o valor do rotacional; se houver uma reversão na direção da rotação da roda, significa uma inversão na rotação do sinal do rotacional. Para que possamos determinar a direção do vetor rotacional, devemos colocar a roda de pás no campo de modo a procurar a orientação que produz o maior torque.

O rotacional do campo elétrico (E) é zero, pois a circulação é zero, porém o rotacional do campo magnético (B) não é zero, pois a circulação do campo magnético por unidade de área é definida como a densidade de corrente.

O rotacional do campo magnético pode ser calculado da seguinte forma:

$$rot\ B = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)a_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)a_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)a_z \qquad (9)$$

**Exemplo 1**

Dado o campo magnético $\vec{B} = 6xy\vec{a}x - 3xz^3\vec{a}y + y^2z\vec{a}z$,calcule o valor de seu rotacional, no ponto P(2, 3, –5).

**Solução:**

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = -9xz^2$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = 2y^2z$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -3z^3$$

$$rot\ B = (-9(2).\left(-5\right)^2 - 2(3)^2.(-5)\right)\vec{a}_x + (0-0)\vec{a}_y + (6(2) - (-3(-5)^3))\vec{a}_z$$

$$rot\ B = (-360\vec{a}_x - 363\vec{a}_z)$$

**Atividade 1**

Dado o campo magnético $\vec{B} = 11xz\vec{a}x + 2xy^3\vec{a}y - 2x^2y\vec{a}z$, calcule o valor de seu rotacional, no ponto P(4, 1, –2).

## 3.7 Lei de Faraday

Depois de muitos ensaios observados por Oersted em 1820, mostrando que a corrente elétrica afetava uma agulha magnética, Faraday iniciou seus ensaios e trabalhou com resultados na sua conclusão experimental que tanto a variação corrente elétrica no tempo ou a variação mecânica da bobina resultavam no aparecimento de uma tensão induzida (força eletromotriz – fem) no condutor próximo, separado fisicamente. Portanto foi definida a seguinte relação:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} \quad V \tag{10}$$

O fluxo magnético é um fluxo que atravessa cada superfície genérica, o perímetro é o caminho fechado, e $d\Phi/dt$ é a taxa de variação temporal desse fluxo.

Conforme Hayt e Buck (2003), o valor de $d\Phi/dt$ diferente de zero pode ser resultado de qualquer uma das seguintes situações:

1) um fluxo variável no tempo através de um caminho fechado estacionário;
2) movimento relativo entre um fluxo estacionário e um caminho fechado;
3) combinação dos dois.

O sinal negativo da equação 10 é devido ao fato de que a força eletromotriz, produzida quando o circuito estiver fechado produzirá uma corrente que por sua vez criará um fluxo magnético com o sentido contrário ao fluxo que o produziu, ou seja, desmagnetizando a fonte que o produziu. Este efeito é chamado de lei de Lenz. Na prática da engenharia, a equação completa (equação 10) é comentada como a lei de Faraday/Lenz quando está escrita com o sinal negativo.

Quando o caminho fechado é aquele composto por N espiras condutoras (assim como o indutor, Figura 12), a equação se tornará:

$$fem = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{11}$$

Na qual $\Phi$ é o fluxo passando através de uma das espiras e $N$ é o número de voltas do indutor (bobina).

A fem é uma escalar, medida em volts e define-se a fem como:

$$fem = \oint E \cdot dL \tag{12}$$

Ou seja, ela é a tensão em torno de um caminho fechado específico. Se for alterada qualquer parte do percurso, a fem também será alterada.

Para Hayt e Buck (2003), se o percurso for alterado, a fem, em geral, também varia. As considerações dos resultados estáticos estão claramente evidenciadas na equação 3, pois uma intensidade de campo elétrico resultante de distribuição de cargas estáticas leva a uma diferença de potencial igual a zero em torno de um caminho fechado. Na eletroestática, a integral de linha leva a uma diferença de potencial; para campos variantes no tempo, o resultado é uma fem ou uma tensão.

Substituindo-se Φ na equação 3, pela integral de superfície de B, temos:

$$fem = \oint E \cdot dL = -\frac{d}{dt}\oint_S B\, dS \tag{13}$$

Podemos avaliar o efeito da lei de Faraday de duas formas diferentes: uma com o campo magnético variável, cortando um indutor estacionário, ou mantendo o campo magnético estacionário e movimentando o condutor.

Considerando-se o primeiro caso, um caminho estacionário, o fluxo magnético será a única grandeza variante no tempo no lado direito da equação 13, e a derivada pode ser tomada para dentro do sinal de integração.

$$fem = \oint E \cdot dL = -\int_S \frac{\partial B}{dt} \cdot dS \qquad (14)$$
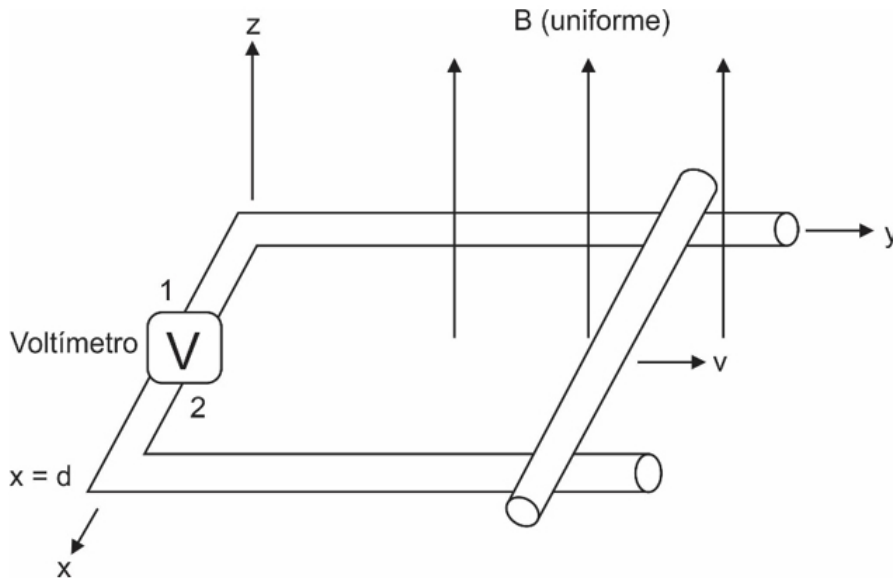
**Figura 14:** Um exemplo ilustrando a aplicação da lei de Faraday no caso de uma densidade de fluxo magnético B constante e um caminho em movimento. A barra de curto-circuito move-se para a direita com velocidade v e o circuito é completado por dois trilhos e um voltímetro extremamente pequeno de alta resistência. A leitura do voltímetro será $V_{12} = -Bvd$.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Agora vamos levando como exemplo de um fluxo constante no tempo e um caminho fechado que se desloca. Antes de chegar em qualquer resultado vamos observar a Figura 14. É um circuito fechado que consiste em dois condutores paralelos conectados em uma das extremidades por um voltímetro (que contém uma alta resistência), e conectada do outro lado por uma barra deslizante que se desloca com a velocidade v. Observa-se que a densidade de fluxo magnético B é constante no espaço e no tempo, e é normal ao plano que contém o caminho fechado.

Considerando a posição da barra de curto-circuito sendo por y; o fluxo que atravessa a superfície dentro do caminho fechado em qualquer tempo $t$ é, então:

$$\Phi = Byd \tag{15}$$

A partir da equação 15, obtemos,

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dy}{dt}d = -Bvd \tag{16}$$

Na qual:

$d$ = distância;
$v$ = velocidade;
$B$ = densidade de fluxo magnético.

Pode-se definir a fem como $\oint E \cdot dL$ e temos um caminho do condutor; sendo assim, pode-se determinar o valor de E em cada ponto ao longo do caminho fechado. Na eletroestática a componente tangencial é zero, na superfície de um condutor perfeito $(\sigma = \infty)$ para qualquer condição no tempo. Equivalendo ao percurso de um "curto-circuito". Considerando os condutores da Figura 14 como perfeitos (menos o voltímetro). O cálculo real de $\oint E \cdot dL$ não deve então envolver qualquer contribuição ao longo de toda a barra em movimento. Mantendo a integração no sentido anti-horário (mantendo o interior do lado positivo da superfície à nossa esquerda). Portanto a contribuição $E \cdot dL$ sobre o voltímetro deve ser $-Bvd$, mostrando que a intensidade de campo elétrico no instrumento do terminal 2 para o terminal 1. Pode-se observar pela regra da mão direita de Fleming (Figura 15), que o terminal 2 será o positivo.
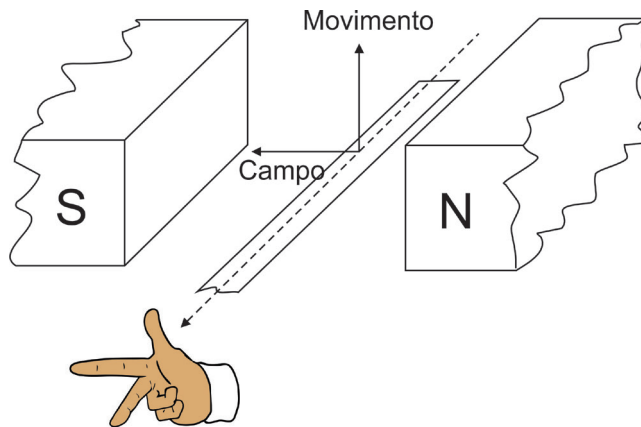
**Figura 15:** Regra da mão direita de Fleming, para o sentido da fem induzida (corrente convencional).
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Consideremos agora este exemplo usando o conceito de fem de movimento. A força em uma carga Q que se move a uma velocidade v em um campo magnético B será:

$$F = Qv \times B \tag{17}$$

Ou:

$$\frac{F}{Q} = v \times B \tag{18}$$

A barra condutora deslizante é composta de cargas positivas e negativas, e cada uma destas sofrem ação desta força. A força por unidade de cargas pode ser idealizada dividindo pelo valor das cargas $Q$. Portanto é:

$$E_m = v \times B \tag{19}$$

Conforme Hayt e Buck (2003), se o condutor em movimento fosse levantado dos trilhos, esta intensidade de campo elétrico forçaria os elétrons para a extremidade da barra (a mais distante) até que o campo eletrostático devido a estas cargas equilibrasse o campo induzido pelo movimento da barra. A intensidade de campo elétrico tangencial resultante deveria, então, ser zero ao longo do comprimento da barra.

A fem de movimento produzida por este condutor em movimento é, então,

$$fem = \oint E_m \cdot dL = \oint (v \times B) \cdot dL \qquad (20)$$

Na qual calculando o valor da equação 20, levando em consideração o intervalo de 0 a d, temos:

$$\oint (v \times B) \cdot dL = \oint_d^0 vB\, dx = -Bvd \qquad (21)$$

Encontra-se a mesma relação anterior.

Para o caso de um condutor movendo-se, agora, em um campo magnético uniforme estacionário. Temos o valor do campo magnético igual a $E_m = v \times B$ em cada trecho do condutor que se move, e calculando a fem resultante,

$$fem = \oint E \cdot dL = \oint E_m \cdot dL = \oint (v \times B) \qquad (22)$$

Levando em consideração o fluxo magnético variando no tempo, pode-se concluir que:

$$fem = \oint E \cdot dL = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS + \oint (v \times B) \cdot dL \qquad (23)$$

Esta expressão poderá ser equivalente a simples afirmativa,

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (24)$$

Qualquer uma destas pode ser utilizada para calcular a tensão induzida fem.

## Resumo

Neste capítulo, iniciamos nosso estudo sobre os conceitos básicos do campo magnético, para familiarizar os alunos a um novo conceito da disciplina. Conceituamos de forma mais elaborada e precisa a definição deste campo devido à corrente elétrica, e o desenho do mapa das linhas criada em torno do imã condutor, ou de uma espira.

## Referências

HAYT JR., William H; BUCK, John A. **Eletromagnetismo**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

QUEVEDO, Carlos Peres; QUEVEDO-LODI, Cláudia. **Ondas eletromagnéticas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SEARS, Francis; ZEMANSKY, Mark W.; YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física III**: eletromagnetismo. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

SKILLING, H, H. **Fundamental of eletric waves**. 2. ed. Nova York: John Wiley & Sons Inc., 1948.

Capítulo 4

# Força Magnética e a Natureza dos Materiais Magnéticos

## Introdução

Estamos preparados para estudar sobre a força e torques relacionados a campos magnéticos e a permeabilidade magnética dos meios materiais.

No início, consideram-se as forças e torques em condutores percorridos por correntes elétricas em uma espira, o campo magnético terrestre e algumas aplicações práticas destes para o funcionamento de equipamentos como: motores e o sensor de efeito Hall.

No final, apresenta-se os tipos de permeabilidade magnética em diferentes materiais, alguns exemploes físicos e as caracteríscas básicas para cada material.

## Objetivos

Ao final do estudo deste capítulo, você será capaz de:

- compreender a força magnética em cargas em movimento;
- conhecer algumas aplicações práticas da força resultante de campos magnéticos;
- algumas regras e leis elementares;
- campo magnético em meios físicos.

## Esquema



## 4.1 Usos importantes e exemplos de campo magnético

Os campos magnéticos apresentados (3.1 e 3.2 do capítulo anterior) estão em torno de materiais percorridos por correntes elétricas ou em imãs permanentes, e são notados pela força que exercem sobre os materiais magnéticos ou pelas cargas elétricas em movimento. Várias características podem ser observadas para a sua aplicação prática.

### 4.1.1 Campo magnético terrestre

O campo magnético terrestre é explicado pela teoria do dínamo, a qual diz que sua produção é por conta da rotação e convecção de um fluído condutor de eletricidade no núcleo exterior do planeta.

A presença deste campo causa em uma bússola, colocada em qualquer lugar dentro dele, um movimento de giro, de modo que o "polo norte" do imã da bússola apontará em direção ao polo geográfico norte da terra.

Uma confusão que decorre dessa definição é que se a terra for considerada como um grande imã, o polo sul geográfico desse planeta seria o mais próximo do polo magnético norte. E para o norte geográfico, tem-se mais próximo polo magnético sul do imã, como mostra a Figura 1.
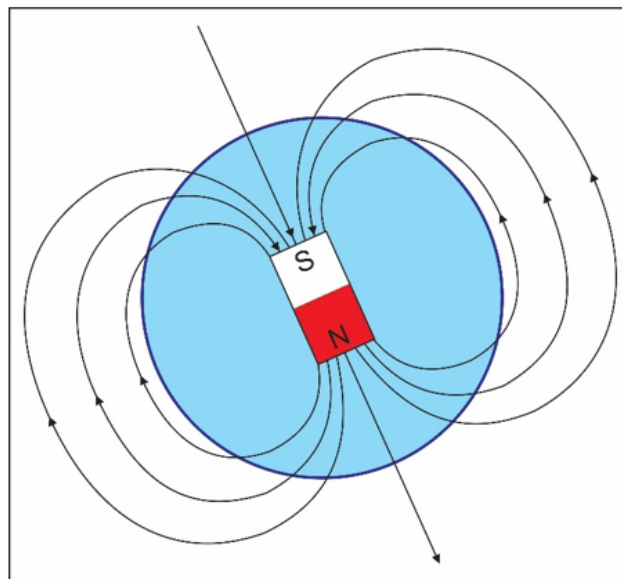
**Figura 1:** O esquema da representação do campo magnético terrestre.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O campo magnético terrestre não é constante, a força do campo e a localização dos polos variam. Além disso, os polos invertem suas orientações periodicamente em um processo chamado reversão geomagnética. A reversão mais recente ocorreu há 780 mil anos atrás.

### 4.1.2 Campo magnético rotativo

O campo magnético rotativo é a chave para o princípio de operação dos motores e alternadores elétricos. Um imã permanente livre inserido neste campo gira de modo a manter seu alinhamento com o campo magnético girante. Este efeito foi conceitualizado por *Nikola Tesla*, utilizado por ele e por outros pesquisadores, com a adoção de correntes alternadas para máquinas elétricas.

Um campo magnético rotativo pode ser criado usando duas bobinas ortogonais no espaço com 90º e defasadas em uma corrente alternada. Este tipo de sistema inicialmente tinha alguns problemas e levou a grandes bitolas de condutor para transmitir uma determinada potência em grandes distâncias. Então criou-se um sistema trifásico no qual as três correntes são de magnitudes iguais e têm uma diferença de fase de 120º. Com três bobinas semelhantes com ângulos geométricos mútuos de 120º, quando alimentados por um sistema trifásico criam o campo magnético girante, como apresentado na Figura 2. A facilidade do sistema trifásico em criar o campo magnético girante, utilizado nos atuais motores elétricos (Figura 3), é uma das razões pelas quais os sistemas trifásicos dominam o padrão de sistemas de energia elétrica em todo o mundo.
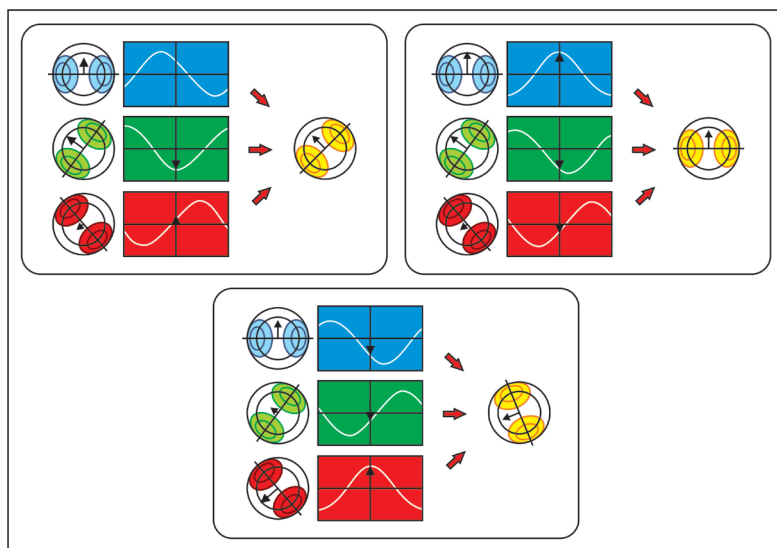
**Figura 2:** Ilustração da criação de um campo girante com três bobinas defasadas igualmente no tempo e no espaço.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.
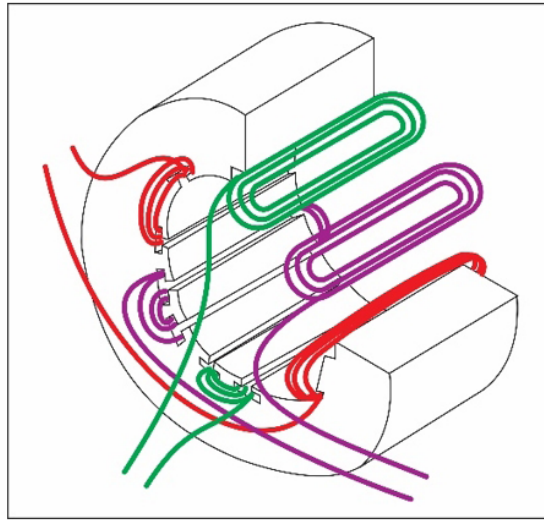
**Figura 3:** Construção de um estator com três conjuntos de bobinas defasadas igualmente entre si (120°).
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Os motores síncronos usam a tensão CC para alimentação do enrolamento de campo, que permite o controle da excitação da máquina. Os motores de indução utilizam rotores com barras em curto circuito (ao invés de imãs), que por sua vez seguem o campo magnético girante do estator (força de *Lorentz*) por conta do efeito da indução e uma corrente elétrica gerada nestas barras.

### 4.1.3 O efeito Hall

Os portadores de carga de um condutor de transporte de corrente colocado em um campo magnético transversal experimentam uma força lateral de *Lorentz*. Isso resulta em uma separação de carga em uma direção perpendicular à corrente e ao campo magnético. A tensão resultante nessa direção é proporcional ao campo magnético aplicado. Isso é conhecido como *efeito Hall*.

O *efeito Hall* é frequentemente usado para medir a magnitude de um campo magnético.
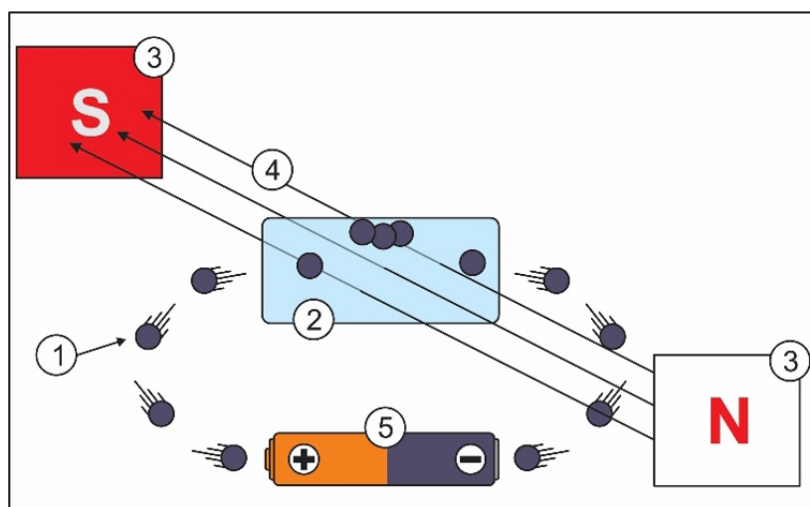
**Figura 4:** Ilustração efeito Hall. 1 – Elétrons; 2 – O elemento Hall, ou sensor Hall; 3 – Imãs; 4 – Campo magnético; 5 – Fonte de alimentação
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 4.1.4 O motor de corrente contínua

Nestes tópicos a seguir, vamos compreender o funcionamento básico de um motor de corrente contínua em relação ao torque magnético atuante sobre um condutor percorrido por uma corrente elétrica, e mergulhado em um campo magnético.

Antes de iniciar, é importante notar que existe uma semelhança muito grande entre um gerador e um motor. Neste caso, vamos nos concentrar apenas no segundo neste momento.

### 4.1.5 Regra da mão esquerda

A regra da mão esquerda de *Fleming* para motores é um dos dois mnemônicos visuais, sendo a outra, a regra da mão direita de *Fleming* (para geradores). Eles foram originados por *John Ambrose Fleming*, no final do século XIX, como uma maneira simples de resolver a direção do movimento em um motor elétrico ou a direção da corrente elétrica em um gerador elétrico.

Quando a corrente flui através de um fio condutor, e um campo magnético externo é aplicado através desse fluxo, o fio condutor experimenta uma força perpendicular tanto a esse campo quanto à direção do fluxo de corrente (isto é, são mutuamente perpendiculares). Uma mão esquerda pode ser mantida, como mostrado na **Figura 5**, de modo a representar três eixos mutuamente ortogonais no polegar, no dedo dianteiro e no dedo do meio. Cada dedo é então atribuído a uma quantidade (força mecânica, campo magnético e corrente elétrica). A mão direita e a mão esquerda são usadas para geradores e motores, respectivamente.
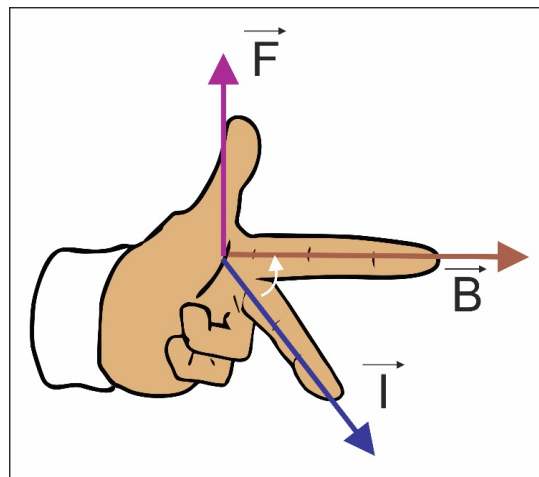
**Figura 5:** A regra esquerda de Fleming.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 4.1.6 O Torque

Existe dois termos: a força eletromagnética e o torque eletromagnético. Estes termos não são sinônimos, mas estão bem relacionados.

Para o exemplo vamos adotar uma bobina (capaz de girar) com uma única espira, como mostra a Figura 6. Conforme a regra da mão esquerda (semelhante à regra da mão direita), no lado 1 da bobina é desenvolvido uma força ortogonal $f_1$. E uma força $f_2$ no lado 2 da bobina, como é mostrado na Figura 7. As forças $f_1$ e $f_2$ são criadas com o objetivo neste sistema de girar em torno do centro da rotação C.
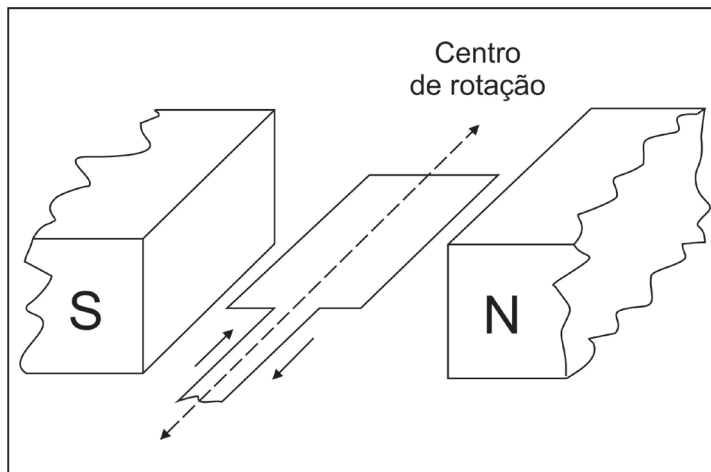
**Figura 6:** Bobina de uma única espira, com corrente num campo magnético.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.
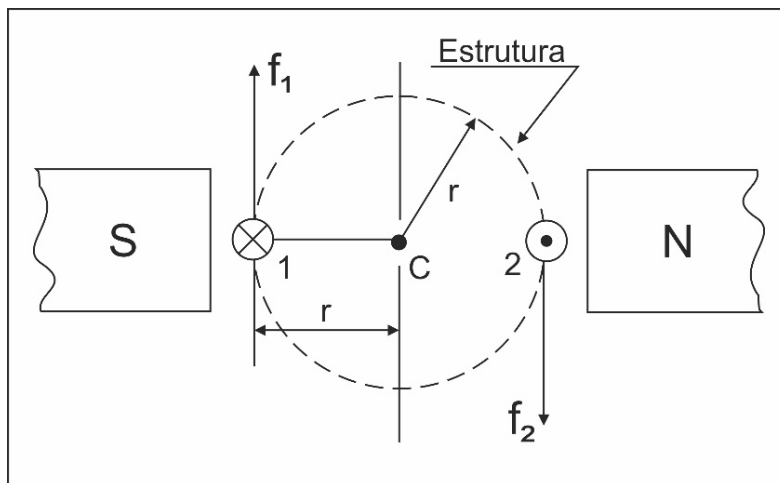
**Figura 7:** Definição do torque desenvolvido.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

O torque na física é definido como a tendência de um equipamento (a distância e a sua força) de produzir rotação. É expresso normalmente em unidades de força e distância, como lb-pé, grama-cm, N-m etc, é interessante distingui-lo do trabalho, que é expresso em pé-lb, cm-g etc. O torque total é a soma dos torques individuais dos dois lados $f_1 r$ e $f_2 r$. Podemos deixar claro que as forças $f_1$ e $f_2$ têm as magnitudes iguais, pois estão no mesmo campo magnético e são percorridos pela mesma corrente.
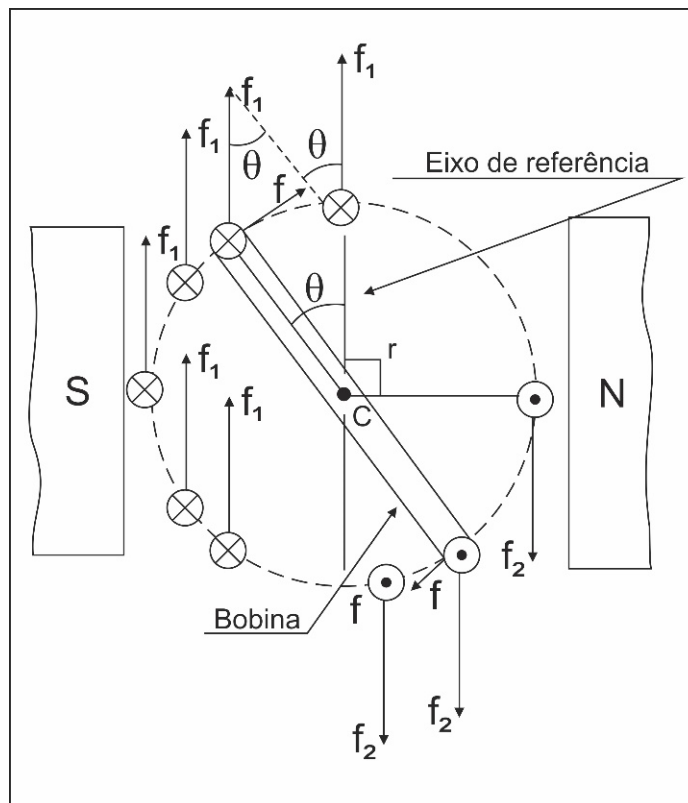
**Figura 8:** Torque útil para rotação.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

A diferença entre a força desenvolvida em todos os condutores de uma armadura em uma máquina simples o torque útil desenvolvido é mostrado na Figura 8 acima.

Note que todos os condutores são percorridos pela mesma corrente em um campo magnético, desenvolvendo uma mesma força. Esta figura mostra que eles carregam a mesma corrente e permanecem perpendiculares ao mesmo campo.

Pode-se concluir que a componente útil da força desenvolvida é:

$$f = F \sin\theta \tag{1}$$

Na qual F é a força em cada condutor e $\theta$ é o complemento do ângulo criado pela força no condutor. Portanto, o torque desenvolvido por um condutor na armadura é:

$$T_c = fr = (F \sin\theta)r \tag{2}$$

### 4.1.7 Generalidade básicas de máquinas elétricas

Em relação à ação motora, temos que:

- o torque eletromagnético produz a rotação nas máquinas;
- a tensão que é gerada nos condutores onde circula a corrente (conhecida como força contra eletromotriz), pela *lei de Lenz*, se opõe a corrente de armadura que produziu o fluxo que o gerou (do campo).

A força contra eletromotriz é expressa pela seguinte equação:

$$E_c = V_a - I_a R_a \tag{3}$$

E pode-se notar que esta tensão é menor que a aplicada.

Rescrevendo e colocando como evidência $I_a$ na equação 3, temos:

$$I_a = \frac{V_a - E_c}{R_a} \tag{4}$$

Os três fatores que determinam a força eletromagnética podem definir que:

$$F = \frac{B.I.l}{1,13} 10^{-7} \tag{5}$$

Já a direção da força eletromagnética pode ser definida pela regra da mão esquerda citada no tópico anterior.

**Exemplo 1**

A bobina apresentada na Figura 6 está em uma armadura de 18 polegadas de diâmetro com um eixo axial de 24 polegadas, e num campo cuja densidade é de 24.000 linhas por polegada quadrada. Calcule quando circula uma corrente de 26 A:

a) a força desenvolvida em cada condutor;
b) a força útil no instante em que a bobina se encontra num ângulo de $60^{\circ}$ com relação ao eixo interpolar de referência;
c) o torque desenvolvido em $lb - pé$.

**Solução:**

a) $F = \frac{B.I.l}{1{,}13} 10^{-7} = \frac{24000 \times 26 \times 24}{1{,}13 \times 10^{7}} = 1{,}325\ lb$

b) $f = F \sin\theta = 1{,}325 \times \sin 60^{\circ} = 1{,}145\ lb$

c) $T_c = fr = 1{,}145\ lb \left(9\ pol \times \frac{1\ pé}{12\ pol}\right) = 0{,}858\ lb - pé$

### 4.1.8 A força exercida por um campo magnético

Se existe um campo magnético *B* em algum ponto do espaço, esse campo pode facilmente ser visualizado por intermédio da agulha de uma bússola, pois, se houver um campo magnético “$B$”, a agulha alinhará sozinha no sentido do campo.

Empiricamente, observa-se que, quando uma determinada carga “$q$” possui uma velocidade “$v$” em um campo magnético, existe uma força sobre o campo magnético que é proporcional à “$q$” e “$v$” e ao seno do ângulo entre as direções de “$B$” e “$v$”. Essa força é perpendicular tanto à velocidade quanto ao campo e pode ser calculada da seguinte forma:

$$F = q.v.B.\sin\theta \qquad (6)$$

Em que:

$\theta$ é o ângulo entre $v$ e $B$.

Para determinarmos a direção e o sentido da força magnética movendo-se sobre uma carga em um campo magnético, utilizamos a regra da mão esquerda.

SAIBA MAIS

A unidade do campo magnético pelo Sistema Internacional (SI) é o Tesla (T). Essa unidade é muito grande. Por exemplo, o campo magnético da Terra varia entre 30 microtesla até superiormente a 60 microtesla. Outra unidade comumente utilizada é a Gauss, que é relacionada com o Tesla por: $1G = 10^{-4}\,T$.

Segundo Vicente Neto, o sentido da força magnética $F_m$ de uma carga $q$, movendo-se com uma velocidade $V$, e com um campo magnético $B$. Se a carga $q$ for negativa, a força magnética $F_m$ estará voltada para baixo.
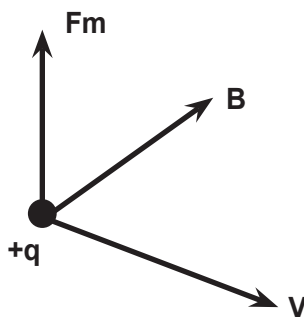
**Figura 9:** Força magnética.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Podemos utilizar a regra da mão esquerda para que possamos determinar a direção e o sentido da força (Fm), do campo (B) e da velocidade (v). Se a carga for negativa, deve-se virar a mão para baixo. Veja uma foto prática (Figura 10).
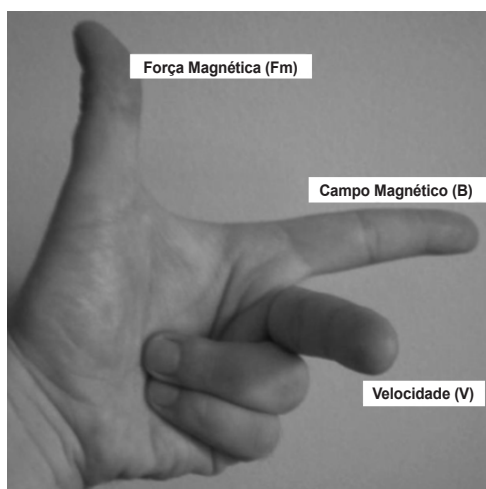
**Figura 10:** Regra da mão esquerda.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## Exemplo 2

Calcule a força magnética de um elétron que se move à velocidade de $4.10^6\ m/s$ em um campo magnético de 1,6T, formando um ângulo de 40º com a horizontal.

## Resolução:

Como a carga de um elétron é de $1{,}6.10^{-19}C$, basta apenas substituir os valores na fórmula:

$$\boldsymbol{Fm = 1{,}6.10^{-19} \times 4.10^{6} \times 1{,}6 \times sen(40^{\circ})}$$
$$\boldsymbol{Fm = 6{,}58.10^{-13}N}$$

AGORA É A SUA VEZ

### Atividade 1

Um elétron possui velocidade de $4{,}4.10^6\ m/s$, com um ângulo de 62º, com o campo magnético de módulo 18. $10^{-3}$T. Calcule o módulo da força magnética.

## 4.2 Fontes de campo magnético

Os ímãs naturais foram as primeiras fontes de campo magnético conhecidas. Por volta de 1829, *Oersted* anunciou a sua descoberta: uma bússola era defletida quando, próximo a ela, circulava uma corrente elétrica. Veremos agora que a corrente elétrica é fonte de um campo magnético.

O campo magnético terrestre assemelha-se a um dipolo magnético com seus polos próximos aos polos geográficos da Terra. A diferença entre o polo magnético e o polo geográfico da Terra é de, aproximadamente, 11,3º.

## 4.3 Campo magnético devido a uma corrente elétrica em um fio longo e retilíneo

Para obtermos o módulo do campo magnético a partir de uma corrente em um fio longo e retilíneo, utilizamos a seguinte expressão:

$$B = \mu . \frac{I}{2.\pi.D} \; [T] \qquad (7)$$

Em que:

$\mu$ = constante de permeabilidade no vácuo [T.m.A];
$I$ = corrente elétrica [A];
$D$ = distância do fio ao ponto onde se deseja formar o campo magnético [m].

A direção do campo magnético em um ponto está perpendicular ao plano que contém o fio e o ponto, podendo ser determinada pela regra da mão direita.

Regra da mão direita: segura-se o fio com a mão direita (regra do saca rolha), de forma que o polegar aponte o sentido da corrente; os dedos dobrados, então, indicarão o sentido do campo magnético.

**Exemplo 3**

Calcule o valor e o sentido do campo magnético no ponto P, resultante de um fio percorrido por uma corrente no sentido de z positivo (saindo da folha) de 7 A.
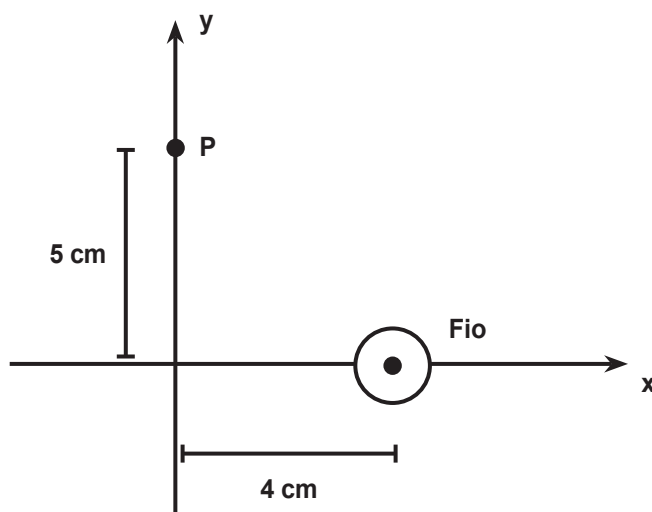
**Figura 11:** Representação do exercício
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Resolução:**

O primeiro passo é calcularmos a distância do fio ao ponto P e converter o valor de centímetros para metros:

$$d^2 = 4^2 + 5^2 = d = 0{,}064m$$

Agora, basta substituirmos os valores na fórmula:

$$B = 4.\pi.10^{-7} \times 7/6{,}2832 \times 0{,}064$$

$$B = 21{,}88.10^6 T$$

Como a corrente está no sentido do eixo z positivo, podemos imaginar que é como se ela estivesse saindo do papel. Então, utilizando a regra da mão direita, e sabendo que o campo magnético é sempre perpendicular ao fio, podemos determinar seu sentido no ponto P.

AGORA É A SUA VEZ

**Atividade 2**

O campo magnético a uma distância de $8\ cm$ de um fio é percorrido por uma corrente elétrica de $16{,}7.10^{-6}T$. Calcule o valor dessa corrente.

## 4.4 Campo magnético em um solenoide

Para Vicente Neto, um solenoide é formado enrolando-se um fio muito longo em um cilindro, comumente um cilindro circular. É utilizado para produzir um campo magnético muito forte e uniforme em seu interior, ou seja, na região envolvida por suas espirais.

Em geral, o metal do fio utilizado é de cobre, e o fio deve ser esmaltado, para evitar um curto, pois os fios estarão um ao lado do outro.

Os solenoides (Figura 12) são extremamente usados hoje em dia. Entre suas principais aplicações, podemos destacar:

- eletroímãs;
- fechaduras elétricas;
- campainhas;
- motor de partida de um carro.

**Figura 12:** Exemplo de um solenoide.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Na Figura 13, podem ser visualizadas as linhas de campo magnético em um solenoide. Note que o campo magnético é concentrado e direcionado da esquerda para a direita.
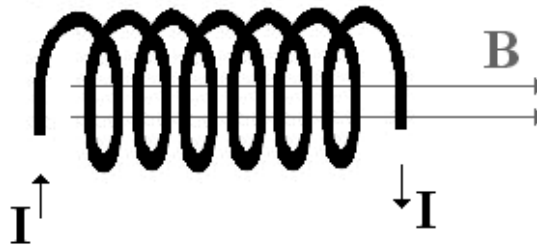
**Figura 13:** Visualização das linhas de campo magnético em um solenoide.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Normalmente, em um solenoide, seu comprimento é muito maior do que seu diâmetro, e, nesse caso, calculamos o campo magnético no solenoide da seguinte forma:

$$B = \mu . n . I \ [T] \tag{8}$$

Em que:

$\mu = 4.\pi.10^{-7}$ constante de permeabilidade no vácuo [T.m.A];

$I$ = corrente elétrica [A];

$n$ = número de voltas por unidade de comprimento [N/L].

**Exemplo 4**

Calcule o campo magnético no interior de um solenoide com comprimento de 30 cm, raio de 1,2 cm e 850 voltas, que transporta uma corrente de 6 A.

**Resolução:**

No primeiro instante, vamos calcular n:

$$n = \frac{850}{0,3} = 2833,33$$

Agora, substituímos os valores na fórmula:

$$B = (4 \times 3,1416 \times 10^{-7}) \times (2833,33) \times (6)$$

$$B = 21,36.10^{-3}T$$

AGORA É A SUA VEZ

**Atividade 3**

Um solenoide com o comprimento de 2,8 m tem um raio de 0,90 cm e 700 voltas. Ele transporta uma corrente de 3,8 A. Calcule o campo magnético $B$ dentro desse solenoide.

## 4.5 Força magnética entre fios paralelos

Conforme Vicente Neto, quando dois fios longos paralelos são percorridos por uma corrente elétrica, existirá, entre esses dois fios, uma força magnética. Se as duas correntes tiverem o mesmo sentido, cada fio terá uma força de atração (Figura 14) em relação ao outro. Se a corrente em cada fio for a mesma, o módulo das duas forças será o mesmo.
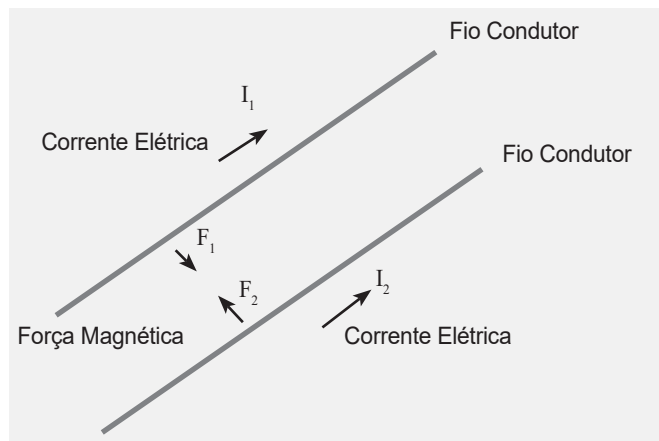
**Figura 14:** Representação de força magnética.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Como as duas correntes têm o mesmo sentido, a força sobre a corrente $I_1$ está no sentido da corrente $I_2$, existindo, assim, uma força igual e oposta à exercida pela corrente $I_2$ sobre $I_1$. As correntes transportadas pelos fios geram uma força magnética, criando uma atração entre eles.

$$F_m = \mu.\frac{I1.I2}{2\pi.R}\ [N] \qquad (9)$$

Em que:

$\mu = 4.\pi.10^{-7}$ é a constante de permeabilidade no vácuo [T.m.A];

$I1$ = corrente elétrica do fio 1 [A];

$I2$ = corrente elétrica do fio 2 [A];

$R$ = distância entre os dois fios [M].

**Exemplo 5**

Dois fios condutores, distantes 30 cm um do outro, são percorridos, cada um, por uma corrente de 2 A. Determine o módulo da força magnética entre esses fios.

**Resolução:**

Basta substituirmos os valores na fórmula:

$$Fm = 4.\pi.10^{-7} \times 2 \times \frac{2}{6{,}2832 \times 0{,}3}$$

$$Fm = 2{,}67.10^{-6}\ N$$

SAIBA MAIS

**Atividade 4**

Calcule a força magnética resultante entre dois fios paralelos separados a uma distância de 2 metros sendo que o primeiro fio é percorrido por uma corrente de 50 A, e o segundo fio é percorrido por uma corrente de 38 A.

## 4.6 Magnetismo nos materiais físicos

No eletromagnetismo, permeabilidade é a medida da habilidade de um material suportar a formação de um campo magnético nele mesmo. Portanto, ele é o grau de magnetização que um material responde para uma aplicação de campo magnético. A permeabilidade magnética é normalmente representada em itálico pela letra μ.

A permeabilidade, no espaço livre ou no vácuo (equação 10), é a medida da quantidade da permeabilidade encontrada ao formar um campo magnético em vácuo.

$$\mu_\circ = 4\pi \times 10^{-7}\frac{Wb}{A.m} \qquad (10)$$

A permeabilidade relativa, apresentada pelo símbolo $\mu_r$, é a relação da permeabilidade de um material específico e da permeabilidade do vácuo.

O termo magnetismo descreve como o material responde no nível microscópio para uma aplicação do campo magnético externo e é usado para categorizar o material. Os materiais são divididos em grupos baseados em seu comportamento magnético:

### 4.6.1 Materiais diamagnéticos

Produzem uma magnetização que se opõe ao campo magnético externo como mostra a Figura 15. Algumas características destes materiais são:

- apresentam susceptibilidade negativa, em torno de $-10^{-5}$;
- têm permeabilidade abaixo de 1 ($\mu < 1$);
- exemplos de materiais diamagnéticos: gases inertes, alguns metais (cobre, bismuto, ouro, prata, mercúrio etc).
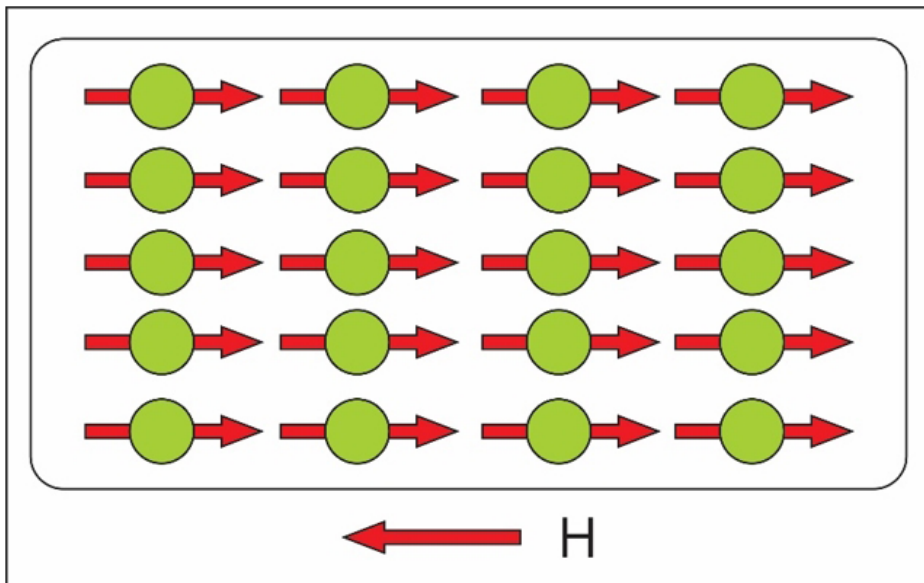
**Figura 15:** Representação de um material diamagnético exposto a um campo H (Tabela 1).
**Fonte:** Elaborado pelo autor.
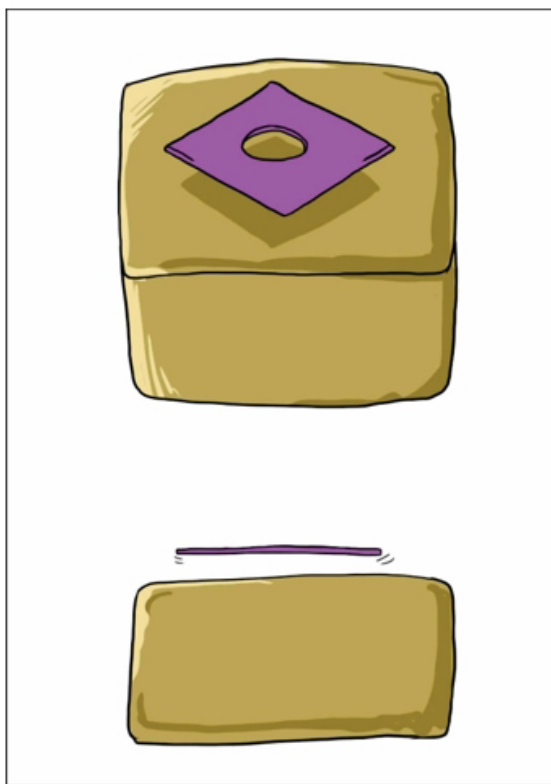
**Figura 16:** O grafite pirolítico flutuando sobre um conjunto de imãs de neodímio. O grafite pirolítico tem propriedades diamagnéticas.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 4.6.2 Materiais paramagnéticos

Estes materiais possuem uma tendência de alinhar os dipolos magnéticos atômicos paralelamente ao campo magnético externo aplicado. Caso estes dipolos estejam unidos fortemente, pode-se dizer que o fenômeno será de ferromagnetismo ou o ferrimagnetismo. As Figuras 17, 18 e 19 mostram uma ilustração da prova do paramagnetismo. Algumas características destes materiais são:

- apresentam baixa susceptibilidade, em torno de $10^{-5}$~ $10^{-3}$;
- têm permeabilidade acima de 1 ($\mu > 1$);
- exemplos de materiais paramagnéticos: alumínio, tungstênio, titânio, platina.
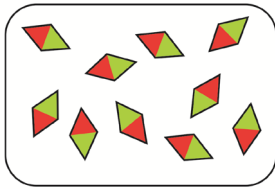
**Figura 17:** (a) pequenos dipolos magnéticos na ausência de um campo magnético externo.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.
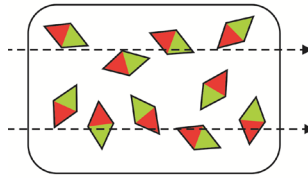
**Figura 18:** (b) pequenos dipolos magnéticos com um campo magnético fraco.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.
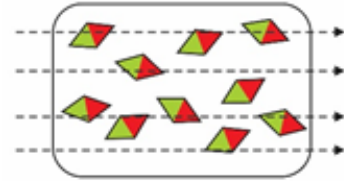
**Figura 19:** pequenos dipolos magnéticos com um campo magnético forte.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

### 4.6.3 Materiais ferromagnéticos

Os materiais ferromagnéticos podem ter uma magnetização independente de um campo B aplicado (Figura 20). Algumas características destes materiais são:

- apresentam alta susceptibilidade;
- têm permeabilidade muito maior que 1 ($\mu \gg 1$);
- exemplos de materiais ferromagnéticos: ferro, níquel, cobalto, cromo etc.
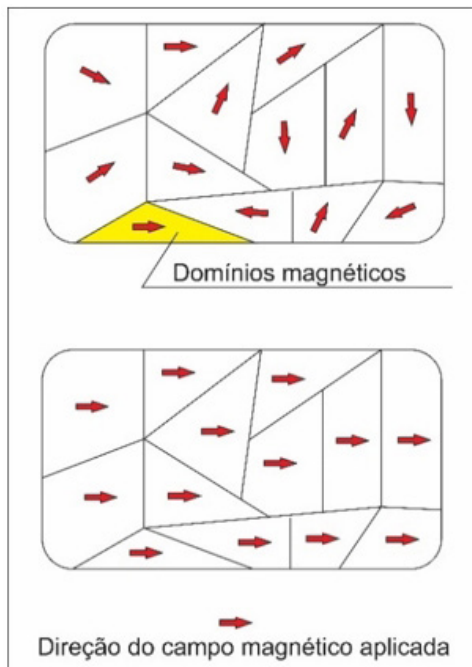
**Figura 20:** material ferromagnético com aplicação de um campo magnético externo.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

**Tabela 1:** Nomes alternativos para os campos B e H

| Nomes alternativos para B |
| --- |
| Densidade de fluxo magnético |
| Nomes alternativos para H |
| Intensidade de campo magnético |
| Força de campo magnético |
| Campo magnetizante |

**Fonte:** Elaborado pelo autor.

## 4.7 Histerese magnética

Quando um campo magnético externo é aplicado a um material ferromagnético, como o ferro, os dipolos atômicos se alinham com ele. Mesmo quando o campo é removido, parte do alinhamento será mantida: o material tornou-se magnetizado. Uma vez magnetizado, o ímã permanecerá magnetizado indefinidamente. Para desmagnetizar, requer-se um calor ou um campo magnético na direção oposta. Este é o efeito utilizável que fornece o elemento de memória em uma unidade de disco rígido (HD).

A relação entre a força de campo H e a magnetização M não é linear em tais materiais. Se um ímã é desmagnetizado (H = M = 0) e a relação entre H e M é plotada para níveis crescentes de força de campo, M segue a curva inicial de magnetização. Esta curva aumenta rapidamente no início e depois se aproxima de uma assíntota chamada saturação magnética. Se o campo magnético agora for reduzido de forma monótona, M segue uma curva diferente. Com zero força de campo, a magnetização é compensada pela origem por uma quantidade chamada remanência. Se o relacionamento H-M for plotado para todas as forças do campo magnético aplicado, o resultado é um loop de histerese (Figura 21). A largura da seção do meio é o dobro da coercitividade do material.
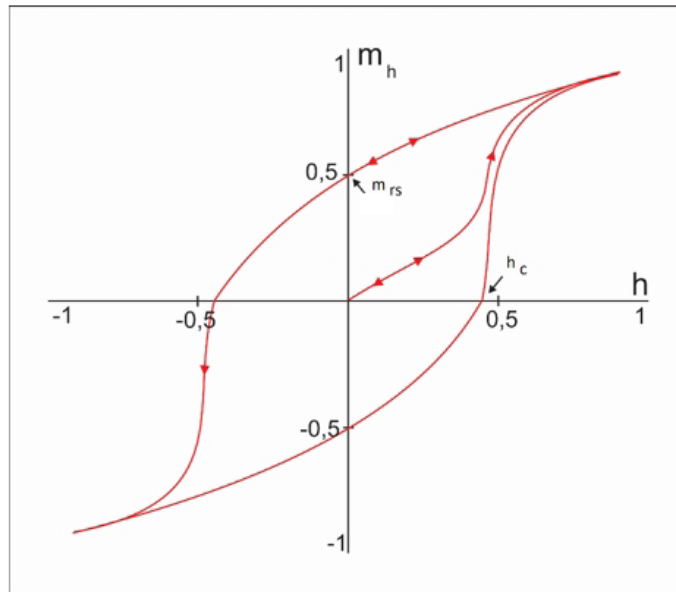
**Figura 21:** Curva de histerese.
**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Modelo teórico da magnetização M contra o campo magnético H. A partir da origem, a curva ascendente é a curva inicial de magnetização. As curvas descendentes após a saturação, juntamente com a curva de retorno inferior, formam o loop principal.

### 4.7.1 Origem física

O fenômeno da histerese em materiais ferromagnéticos é o resultado de dois efeitos: rotação de magnetização e mudanças de tamanho ou número de domínios magnéticos. Em geral, a magnetização varia (na direção, mas não na magnitude) através de um ímã, mas em ímãs suficientemente pequenos, não. Nesses ímãs de domínio único, a magnetização responde a um campo magnético girando. Ímãs de domínio único são usados sempre que seja necessária uma magnetização forte e estável (por exemplo, gravação magnética).

**Exemplo 6**

Escreva o que acontecerá com um pedaço de ferro ao ser colocado ao lado de um ímã.

**Solução:**

O ferro, por ser um material ferromagnético, ao ser aproximado de um campo magnético, ficará imantado, ou seja, esse pedaço de ferro se tornará um ímã por um tempo.

AGORA É A SUA VEZ

**Atividade 5**

Se quisermos construir um objeto que não sofra influência de campos magnéticos externos, identifique e escreva quais tipos de materiais podem ser utilizados.

## Resumo

Neste capítulo, finalizamos nosso estudo relacionado aos conceitos básicos do campo magnético. Conceituamos de forma mais precisa a força e o torque gerados por campos magnéticos.

Exemplos práticos de vários tipos de aplicações dos campos magnéticos práticos foram apresentados durante o capítulo.

E por fim a permeabilidade magnética em diferentes tipos de materiais foram abordadas no final desta obra.

# Referências

HAYT JR., William H; BUCK, John A. **Eletromagnetismo**. 6 ed. Rio de Janeiro. LTC, 2003.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 3**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003/2004.

VICENTE, L.P.N.; MELO, M.L.; SILVA, A.M.B. **Eletromagnetismo e análise de circuitos.** 1 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil e Universidade de Uberaba 2011.

KELLER, F.J; GETTYS, W.E; SKOVE, M.J. **Física**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1999. v. 2.

SEARS, F.; ZEMANSKY, M. W.; YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física III**: eletromagnetismo. 12. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.

TIPLER, P.A.; MOSCA, G. **Física**: eletricidade e magnetismo, ótica. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 2.